

# 量子 Grothendieck 環について

藤田 遼 (Ryo FUJITA)\*

## 概要

本稿における量子 Grothendieck 環とは、アフィン量子群の有限次元表現のなすモノイダル圏の Grothendieck 環の量子変形として定義される非可換環を指す。これは標準基底 (canonical basis) と呼ばれる良い基底を備え、既約表現の  $q$  指標の決定アルゴリズムに関する予想 (Kazhdan-Lusztig 型予想) の定式化に用いられる。ADE 型アフィン量子群の場合には中島籠多様体上の偏屈層による標準基底の幾何学的解釈があり、これを用いて Kazhdan-Lusztig 型予想が正しいことと標準基底に関する種々の正值性が証明される。同等の幾何学的解釈が未だ知られていない残りの BCFG 型については、上記 Kazhdan-Lusztig 型予想と正值性は未解決問題として残っていたが、最近になって団代数や量子群の圏化理論との関係が明らかになり、この問題に関してもある程度の進展が見られた。本稿では David Hernandez 氏, Se-jin Oh 氏, 大矢浩徳氏との共同研究 [6, 5] に基づき、こうした最近の進展について述べる。<sup>\*1</sup>

## 1 アフィン量子群の有限次元表現論

まず、アフィン量子群の有限次元表現論の基礎事項について大雑把に説明する。

### 1.1 アフィン量子群の有限次元表現

アフィン量子群は複素有限次元単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の「量子アフィン化」にあたる代数系である。「量子アフィン化」は「アフィン化」と「量子化」をあわせたものと理解される。ここで、Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の「アフィン化」は、ループ Lie 代数  $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$  の 1 次元中心拡大として定義されるアフィン Lie 代数  $\hat{\mathfrak{g}} := L\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}K$  ( $K$  は中心元) を指す。これは  $\mathbb{C}$  上の無限次元 Lie 代数である。一方、Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の「量子化」とは普遍包絡環  $U(\mathfrak{g})$  の 1 パラメータ変形として定義される量子群 (量子包絡環)  $U_q(\mathfrak{g})$  を指す。これは量子パラメータ  $q \in \mathbb{C}^{\times}$  に依存し、 $q = 1$  で普遍包絡環  $U(\mathfrak{g})$  を復元するような、非余可換 Hopf 代数である。したがって、Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の「量子アフィン化」であるところのアフィン量子群  $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  は、アフィン Lie 代数  $\hat{\mathfrak{g}}$  の普遍包絡環  $U(\hat{\mathfrak{g}})$  を量子パラメータ  $q \in \mathbb{C}^{\times}$  を用いて非余可換に変形して得られる Hopf 代数である。アフィン量子群  $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  は可解格子模型や量子可積分系など理論物理の文脈で導入された代数系であるが、純粋に表現論的な視点からも非常に面白い研究対象である。本稿では特にその有限次元表現について論じる。

以下、量子パラメータ  $q \in \mathbb{C}^{\times}$  は 1 の冪根でないとし、Hopf 代数  $U \in \{U(\mathfrak{g}), U(\hat{\mathfrak{g}}), U_q(\mathfrak{g}), U_q(\hat{\mathfrak{g}})\}$  の有限次元 (タイプ 1) 表現のなす圏を  $\text{Rep } U$  と書き表す。これは自然に  $\mathbb{C}$  線形モノイダル・アーベル圏を成す。ここで「アフィン化」、「量子化」に伴って  $\text{Rep } U$  の構造がどのように変化するかを見ておく。

\* 京都大学数理解析研究所, e-mail: rfujita@kurims.kyoto-u.ac.jp

<sup>\*1</sup> なお、本稿は第 64 回代数シンポジウムにおける大矢浩徳氏の講演 [16] のその後にあたる内容を含んでいる。[16] では本稿で割愛した量子 Grothendieck 環とその標準基底の代数的構成の詳細も解説されている。

まず、よく知られているように圏  $\text{Rep } U(\mathfrak{g})$  はアーベル圏として半単純（任意の対象が既約対象の有限直和に分解する）であり、モノイダル圏として対称 (symmetric) である。後者は、Lie 代数の表現のテンソル積について、テンソル成分の単純な入れ替えによって異なる順序のテンソル積表現の間に表現としての自然な同型が作れることから自明である。同様に、圏  $\text{Rep } U(\hat{\mathfrak{g}})$  もモノイダル圏として対称である。しかし半単純性は失われ、圏  $\text{Rep } U(\hat{\mathfrak{g}})$  の対象の間には非自明な拡大が存在しうる。一方、圏  $\text{Rep } U_q(\mathfrak{g})$  では、逆に半単純性は保たれるが、モノイダル圏としての対称性が失われる。これは量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  が Hopf 代数  $U(\mathfrak{g})$  の非余可換変形であることから来ている。ただし、圏  $\text{Rep } U_q(\mathfrak{g})$  は組紐テンソル圏 (braided tensor category) ではある。すなわち任意の  $V, W \in \text{Rep } U_q(\mathfrak{g})$  について非自明な同型  $R_{V,W}: V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$  が存在する。テンソル積の非対称性とは  $R_{W,V} \circ R_{V,W} \neq \text{id}_{V \otimes W}$  を意味する。

このように、「アフィン化」はアーベル圏としての半単純性を失わせる方向に、「量子化」はモノイダル圏としての対称性を失わせる方向に変化をもたらす。このことから「量子アフィン化」、すなわち圏  $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  においてはアーベル圏としての半単純性とモノイダル圏としての対称性がともに失われていると想像され、実際にそうなっている。表にまとめると以下ようになる。

圏	アーベル圏として	モノイダル圏として
$\text{Rep } U(\mathfrak{g})$	半単純	対称
$\text{Rep } U_q(\mathfrak{g})$	半単純	非対称
$\text{Rep } U(\hat{\mathfrak{g}})$	非半単純	対称
$\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$	非半単純	非対称

さらに言うと、圏  $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  はモノイダル圏として組紐テンソル圏ですらない。実際、 $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  において

$$V \otimes W \not\cong W \otimes V \quad (1)$$

なる既約表現の組  $(V, W)$  がたくさん存在する。その意味で、圏  $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  は「非可換な」モノイダル圏であると言える。このような状況において、「では、具体的に (1) のような非可換現象はいつ起こるのか?」という問いは基本的であると思われる。後で圏  $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$  の圏代数構造について述べるが、それはこの問いに部分的な解答を与えるという点で重要である（後の注意 4.7 を参照）。

## 1.2 Grothendieck 環と $q$ 指標

モノイダル圏を調べる上で Grothendieck 環を考えることは基本的である。一般に、モノイダル・アーベル圏  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes)$  に対し、その Grothendieck 環とは、アーベル圏としての Grothendieck 群

$$K(\mathcal{C}) := \bigoplus_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}[X] \left/ \left\langle \begin{array}{l} [X] = [Y] + [Z], \\ \text{if } 0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0 \text{ exact in } \mathcal{C} \end{array} \right. \right.$$

に積を  $[X] \cdot [Y] := [X \otimes Y]$  と定義して得られる環であった。ただし、テンソル積  $\otimes$  が関手として双完全であることを仮定する。さらにもし圏  $\mathcal{C}$  の各対象が有限長の組成列を持つならば、既約対象の同型類のなす集合  $\text{irr } \mathcal{C}$  は  $K(\mathcal{C})$  の  $\mathbb{Z}$  加群としての自由基底を与える。この基底に関する環  $K(\mathcal{C})$  の構造定数はすべて非負整数になる。これは、任意の対象  $X, Y \in \mathcal{C}$  について

$$[X] \cdot [Y] = [X \otimes Y] = \sum_{L \in \text{irr } \mathcal{C}} [X \otimes Y : L][L]$$

と展開したときの係数  $[X \otimes Y : L]$  が組成重複度で与えられることから直ちに従う。

**例 1.1** (古典的な指標理論). 例として  $\mathcal{C} = \text{Rep } U(\mathfrak{g})$  のときを考える. このとき, Grothendieck 環  $K(\text{Rep } U(\mathfrak{g}))$  は表現の指標の成す環と同一視される. 任意の表現  $V \in \text{Rep } U(\mathfrak{g})$  に対して Cartan 部分代数  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  の作用に関するスペクトル分解を考えることでその指標  $\chi(V)$  が定まり, これは環の埋め込み

$$\chi: K(\text{Rep } U(\mathfrak{g})) \hookrightarrow \mathbb{Z}[P] = \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1} \mid i \in I]$$

を導く. ここで,  $I$  は  $\mathfrak{g}$  の Dynkin 図形の頂点集合,  $P = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i$  はウェイト格子,  $y = e^{\varpi_i}$  とした. さらに,  $\chi$  の像は Weyl 群不変式のなす部分環と一致する. なお, 圏  $\text{Rep } U(\mathfrak{g})$  の各既約表現はある支配的ウェイト  $\lambda \in P^+ := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i$  を最高ウェイトに持つ最高ウェイト表現  $V(\lambda)$  として構成され, これにより  $P^+$  と  $\text{irr } \text{Rep } U(\mathfrak{g})$  の間に 1:1 対応がある. 既約指標  $\chi(V(\lambda))$  は Weyl の指標公式によって明示的かつ統一的に書き下すことができることも思い出しておく.

さて, これ以降はアフィン量子群の有限次元表現のみを考えるので,

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} := \text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$$

とおく. 圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  に属する既約表現は, 古典的な最高ウェイトによる分類 (例 1.1) の類似で,  $\ell$  最高ウェイトによる分類 ( $\ell$  はループの意) が知られている [2]. これによれば, 基本  $\ell$  ウェイトの集合  $\{\varpi_{i,a} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^\times\}$  で生成される可換自由モノイド  $\mathcal{P}^+ := \bigoplus_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_{i,a}$  の各元  $\lambda$  に対し既約  $\ell$  最高ウェイト表現  $L(\lambda) \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  が定まり, これにより集合  $\mathcal{P}^+$  と  $\text{irr } \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  の間に 1:1 対応がある. ここで基本  $\ell$  ウェイト  $\varpi_{i,a}$  が Dynkin 図形の頂点  $i \in I$  だけでなく, 複素数  $a \in \mathbb{C}^\times$  との組でラベル付けられていることに注意する. このパラメータ  $a \in \mathbb{C}^\times$  はだいたいループ化変数  $z$  の作用の固有値に対応するもので, スペクトル変数と呼ばれる.

古典的な指標  $\chi$  の自然な類似として, 各表現  $V$  に対して量子ループ Cartan 部分環  $U_q(L\mathfrak{h})$  の作用に関するスペクトル分解を考えることで定まる  $q$  指標  $\chi_q(V)$  がある. これは E. Frenkel–Reshetikhin [4] によって導入され, 環の埋め込み

$$\chi_q: K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}} := \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^\times] \quad (2)$$

を導くことが証明された. このことから特に, Grothendieck 環  $K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  は可換であることが従う. 圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  は (1) の意味で非可換なモノイダル圏であったから, これは非自明な帰結である. 圏のレベルでは非可換だが, 対象の間の拡大の情報を忘れた Grothendieck 環のレベルでは可換になるというのである.

**例 1.2** ( $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  の場合).  $V_a := L(\varpi_a)$  を 2次元基本表現 ( $a \in \mathbb{C}^\times$ ) とすると, その  $q$  指標は  $\chi_q(V_a) = Y_a + Y_{aq^2}^{-1}$  である. 2つの基本表現  $V_a$  と  $V_b$  のテンソル積を考える.

- $a/b \notin \{q^2, q^{-2}\}$  のとき, テンソル積は既約で,  $V_a \otimes V_b \cong L(\varpi_a + \varpi_b) \cong V_b \otimes V_a$  となる.
- $b = aq^2$  のとき, テンソル積は可約で,  $L := L(\varpi_a + \varpi_{aq^2})$  とおいて 2つの短完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow V_a \otimes V_{aq^2} \rightarrow L \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow L \rightarrow V_{aq^2} \otimes V_a \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0.$$

がある. 両者はともに分裂せず, したがって  $V_a \otimes V_{aq^2} \not\cong V_{aq^2} \otimes V_a$  であるが, Grothendieck 環では  $[V_a] \cdot [V_{aq^2}] = [L] + 1 = [V_{aq^2}] \cdot [V_a]$  となるから確かに可換である. またこの完全列から  $L$  の  $q$  指標は

$$\chi_q(L) = \chi_q(V_a)\chi_q(V_{aq^2}) - 1 = Y_a Y_{aq^2} + Y_a Y_{aq^4}^{-1} + Y_{aq^2}^{-1} Y_{aq^4}^{-1}$$

と計算できる.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  ( $A_1$  型) のときは,  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  に属するすべての既約表現の指標が計算でき, 明示的に書き下せる [1]. しかし,  $A_1$  型でない一般の  $\mathfrak{g}$  については, 基本表現  $L(\varpi_{i,a})$  や Kirilov–Reshetikhin 加群のような特別なクラスを除いて, 既約  $q$  指標を統一的に書き下すことは現時点ではできていない. 特に, Weyl の指標公式のような明示公式は知られていない. こうした (特に表現のなす圏が非半単純であるような) 状況における既約指標の決定問題に対して, しばしば Kazhdan–Lusztig 型のアプローチが有効である. これを次節で説明する.

## 2 量子 Grothendieck 環

### 2.1 元来の Kazhdan–Lusztig 理論

元来の Kazhdan–Lusztig 理論は, 複素単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の既約最高ウェイト表現の指標決定問題に関するものである.  $\mathfrak{g}$  の無限次元最高ウェイト表現を含むある良いアーベル圏  $\mathcal{O}_0$  (正確には BGG 圏  $\mathcal{O}$  の主ブロック) に属する既約表現は  $\mathfrak{g}$  の Weyl 群によるラベル付け  $\text{irr } \mathcal{O}_0 = \{L_w \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$  を持つ. その Grothendieck 群  $K(\mathcal{O}_0)$  には, 既約表現のなす基底  $\{[L_w] \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$  に加えて, Verma 加群 (普遍最高ウェイト表現) のなす基底  $\{[M_w] \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$  が存在する. 既約表現の指標を直接決定するのは難しいが, Verma 加群の指標は簡単にわかる. そこで組成重複度  $[M_w : L_v]$  を求める問題を考える.

Kazhdan–Lusztig [13] は  $K(\mathcal{O}_0) \cong \mathbb{Z}W_{\mathfrak{g}}$  と見て, 群代数  $\mathbb{Z}W_{\mathfrak{g}}$  の 1 パラメータ変形として岩堀–Hecke 環  $\mathcal{H}_t(W_{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{w \in W_{\mathfrak{g}}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]T_w$  を考え, その standard 基底  $\{T_w \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$  からある条件で特徴づけられる標準基底 (canonical basis)  $\{C_w \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$  (Kazhdan–Lusztig 基底とも言う) を代数的に構成した. この構成は標準基底の各元を standard 基底から帰納的に得るアルゴリズムを与え, 特に 2 つの基底の間の変換行列  $(p_{w,v}(t))$  が帰納的に計算できる. このとき「変換行列の係数  $p_{w,v}(t) \in \mathbb{Z}[t]$  が特殊化  $t = 1$  で組成重複度  $[M_w : L_v]$  に一致する」というのが Kazhdan–Lusztig 予想である. これは, 「同一視  $K(\mathcal{O}_0) \cong \mathbb{Z}W_{\mathfrak{g}}$  を  $T_w|_{t=1} = [M_w]$  ( $\forall w \in W_{\mathfrak{g}}$ ) なるように取ったとき  $C_w|_{t=1} = [L_w]$  ( $\forall w \in W_{\mathfrak{g}}$ ) となる」と言い換えられる.

予想自体はこのように代数的に定式化されるが, Beilinson–Bernstein および Brylinski–Kashiwara によるその最初の証明には旗多様体の幾何を用いる必要があったことにも注意を向けておく.

### 2.2 量子 Grothendieck 環とその標準基底

圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  における既約  $q$  指標の決定問題に対して同様の Kazhdan–Lusztig 型アプローチを考えたい. これが Grothendieck 環  $K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  の 1 パラメータ変形  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ , すなわち量子 Grothendieck 環を導入する動機である. 量子 Grothendieck 環  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  は当初  $\mathfrak{g}$  が ADE 型のときに Nakajima [14] および Varagnolo–Vasserot [15] によって幾何を用いて構成され, 後に Hernandez [7] が一般型の  $\mathfrak{g}$  に対して代数的構成を与えた. ここでは Hernandez の流儀に従って, 量子 Grothendieck 環の代数的構成を大雑把に説明する. それは以下の可換図式にまとめられる:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\chi_q} & \bigcap_{i \in I} \text{Ker } S_i \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}} = \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^{\times}] \\ \uparrow t=1 & & \uparrow t=1 \\ K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) & := & \bigcap_{i \in I} \text{Ker } S_{i,t} \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t} = (\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{Z}[t^{\pm 1}], *) \end{array}$$

準同型  $\chi_q$  によって通常の Grothendieck 環  $K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  が Laurent 多項式環  $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}}$  に埋め込まれることを思い出そう. そこでまず新たに変数  $t^{1/2}$  を導入し  $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}}$  の非可換変形として量子トラス  $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t}$  を考える. これは自由

$\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$  加群  $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}] = \bigoplus_{m \in \mathcal{M}_{\mathfrak{g}}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]m$  (ここで  $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}}$  は  $Y$  変数たちの Laurent 単項式の集合) に適当な歪対称双線形形式  $\gamma: \mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \times \mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  を用いて新たな積  $*$  を

$$m * m' := t^{\gamma(m, m')} mm'$$

のように入れて定まる非可換環である. この双線形形式  $\gamma$  は  $\mathfrak{g}$  の量子 Cartan 行列 (Cartan 行列の 1 パラメータ変形) を用いて適切に定義される. 次に量子 Grothendieck 環を  $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}, t}$  の部分環として定義する. [4, 3] により,  $\chi_q$  の像は  $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}}$  の中でいわゆるスクリーニング作用素  $S_i$  ( $i \in I$ ) の核の共通部分として記述できることが知られている (これは例 1.1 において  $\chi$  の像が Weyl 群不変式環として書けたことの類似である). そこでこの記述に倣って, スクリーニング作用素の  $t$  変形  $S_{i, t}$  を適切に定め, 量子 Grothendieck 環  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  をその共通核  $\bigcap_{i \in I} \text{Ker } S_{i, t} \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}, t}$  として定義する. 各  $i \in I$  について  $\text{Ker } S_{i, t} \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}, t}$  は  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -部分代数として簡単に書けるが, ここでは割愛する.

続いて量子 Grothendieck 環の標準基底の構成を述べる. 圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  においては, 通常の Kazhdan–Lusztig 理論における Verma 加群の対応物として, standard 加群 (または局所 Weyl 加群) と呼ばれる基本表現のテンソル積

$$M(\lambda) := L(\varpi_{i_1, a_1}) \otimes \cdots \otimes L(\varpi_{i_n, a_n})$$

を考える. ただし, 順序  $\lambda = \varpi_{i_1, a_1} + \cdots + \varpi_{i_n, a_n}$  は  $k < l$  ならば  $a_k/a_l \notin q^{\mathbb{Z}_{>0}}$  なるようにとる. 加群  $M(\lambda)$  は  $L(\lambda)$  を唯一の単純商に持ち, 集合  $\{[M(\lambda)] \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$  は Grothendieck 環  $K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  の  $\mathbb{Z}$  上の基底を成す. その  $t$  類似として, 量子 Grothendieck 環  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  の  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$  上の standard 基底  $\{M_t(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$  を

$$M_t(\lambda) := t^{-\gamma(m)} L_t(\varpi_{i_1, a_1}) * \cdots * L_t(\varpi_{i_n, a_n})$$

によって定める. ここで,  $\gamma(m) := \sum_{1 \leq k < l \leq n} \gamma(Y_{i_k, a_k}, Y_{i_l, a_l})$  であり,  $L_t(\varpi_{i, a})$  は  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  の元であって  $L_t(\varpi_{i, a}) = Y_{i, a} + (\text{ある変数 } Y_{j, b} \text{ の負冪を含む Laurent 単項式の線形結合})$  という形に書けるものとして一意的に決まる. この  $L_t(\varpi_{i, a})$  は特徴づけから帰納的に計算可能な元であり,  $L_t(\varpi_{i, a})|_{t=1} = \chi_q(L(\varpi_{i, a}))$  を満たすことも分かる. したがって特に各  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  について  $M_t(\lambda)$  も原理的に計算可能であって,  $M_t(\lambda)|_{t=1} = \chi_q(M(\lambda))$  を満たす. こうして得られた基底  $\{M_t(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$  を standard 基底として, 通常の Kazhdan–Lusztig 理論のときと全く同じやり方で  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  の標準基底  $\{L_t(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$  を構成することができる (Nakajima [14], Hernandez [7]). 標準基底の各元  $L_t(\lambda)$  はしばしば既約  $(q, t)$ -指標と呼ばれる. 実際,  $\mathfrak{g}$  が ADE 型のとき, Kazhdan–Lusztig 予想の圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  における類似として次が成り立つことが分かっている.

**定理 2.1** (Nakajima [14], Kazhdan–Lusztig 型予想). Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が ADE 型のとき, 任意の  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  について等式

$$L_t(\lambda)|_{t=1} = \chi_q(L(\lambda)) \quad (3)$$

が成り立つ.

また,  $L_t(\lambda)$  が既約  $q$  指標  $\chi_q(L(\lambda))$  の  $t$  類似であるとすれば, ある種の正値性が期待される. 実際, Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が ADE 型のとき, 以下の 2 つの正値性が成り立つことが分かっている.

**定理 2.2** (Nakajima [14] + Varagnolo–Vasserot [15]). Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が ADE 型のとき, 以下が成り立つ:

- (P1) 任意の  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  について,  $L_t(\lambda) \in \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}, t}$  は  $\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{\pm 1/2}]$  に係数を持つ;
- (P2) 量子 Grothendieck 環  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  の標準基底  $\{L_t(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$  に関する構造定数はすべて  $\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{\pm 1/2}]$  に属する.

通常の Kazhdan–Lusztig 予想の最初の証明が幾何学的だったのと同様に，上記定理 2.1 & 2.2 の証明には中島箴多様体の幾何を用いる．この幾何学的手法は今のところ ADE 型の場合にしか適用できない．しかし，標準基底は  $\mathfrak{g}$  の型に関わらず代数的に定義されるので，もちろん以下の予想が立つ．

**予想 2.3** (Hernandez). 定理 2.1 & 2.2 の主張は一般の単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  について（特に BCFG 型のときにも）正しい．

## 2.3 主定理

本稿の主定理は予想 2.3 を部分的に解決する以下の結果である．

**定理 2.4** ([6, 5]). 定理 2.2, すなわち量子 Grothendieck 環  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  の標準基底に関する正值性 (P1) と (P2) は一般の単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  について正しい．また，等式 (3) は少なくとも以下の 2 つの場合について正しい：

- (ア)  $\mathfrak{g}$  が B 型のとき（任意の  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  に対して），
- (イ)  $L(\lambda)$  が「到達可能 (reachable)」のとき（任意型の  $\mathfrak{g}$  に対して）．

ここで，到達可能性は団代数の圏化理論から来る術語であり，4 節で説明される（定義 4.6 を参照）．我々の証明は幾何を直接的には用いないが，代わりに団代数の理論や量子群の圏化理論などを援用する．本稿の残りの部分で，この定理 2.4 の証明の概略を説明する．

## 3 異なる型の量子 Grothendieck 環の間の同型

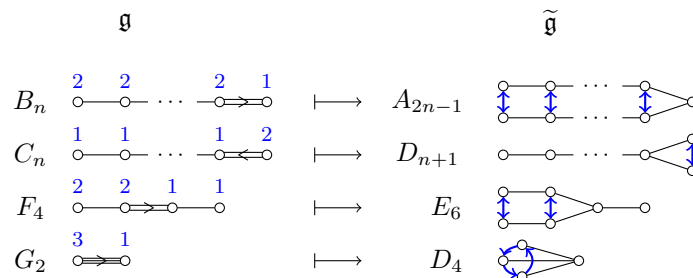
### 3.1 同型 $\Psi$

定理 2.4 の証明の鍵となるのが，次に述べる事実である．

**定理 3.1** ([6]). Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は BCFG 型とする．このとき  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数の同型

$$\Psi: K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\cong} K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})$$

であって標準基底を標準基底に写すものが存在する．ただし， $\tilde{\mathfrak{g}}$  は  $\mathfrak{g}$  を展開 (unfolding) して得られる ADE 型 Lie 代数であり，具体的には以下の Dynkin 図形の対応で与えられる：



ここで，左辺の Dynkin 図形の各頂点  $i$  の上に青字で記した整数  $d_i \in \{1, 2, 3\}$  は対称化数，すなわち  $(c_{ij})_{i,j \in I}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 行列としたとき  $d_i c_{ij} = d_j c_{ji} \ (\forall i, j \in I)$  を満たす数である．感覚的な言い方になるがこれを Dynkin 図形の「厚み」とみなして「厚い」部分をスライスすることで右辺の ADE 型 Dynkin 図形が得られ

る仕組みになっている．もう少し正確に言えば， $\mathfrak{g}$  の Dynkin 図形における頂点  $i \in I$  が  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の Dynkin 図形において青い矢印で示した自己同型でうつり合う  $d_i$  個の頂点に分かれる．

定理 3.1 の同型  $\Psi$  によって， $BCFG$  型の量子 Grothendieck 環と  $ADE$  型の量子 Grothendieck 環が直接的に結びつく． $ADE$  型量子 Grothendieck 環においては中島叡多様体の幾何を用いて標準基底が良い性質を持つことがすでに示されており，同型  $\Psi$  を介してそうした良い性質が  $BCFG$  型へと伝播する．この事実が主定理 2.4 の証明の肝心な部分である．例えば， $ADE$  型の量子 Grothendieck 環の構造定数の正値性 (P2) はすでにわかっているので，直ちに次が従う．

**系 3.2** (正値性の伝播)． $\mathfrak{g}$  が  $BCFG$  型のときも，構造定数の正値性 (P2) は正しい．

本稿では定理 3.1 の証明の詳細については立ち入らないが，少しだけコメントをしておく．同型  $\Psi$  の構成は，量子 Grothendieck 環  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$  の生成元と関係式による上手い表示を見つけ，それを  $K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})$  の表示と比較して一致することを確認することによる．したがって構成は純代数的である．しかし，その上手い表示を得るために，圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  のコア部分圏と呼ばれる良い部分圏が  $\mathfrak{g}$  に付随する Lie 群の極大冪単部分群の量子座標環の圏化を与えるという事実などを用いる．\*2

### 3.2 $B$ 型における Kazhdan–Lusztig 型予想の証明 (= 同型 $\Psi|_{t=1}$ の圏化)

次に  $B$  型における Kazhdan–Lusztig 型予想をどのように証明するか簡単に述べる．これは一言で言えば，同型  $\Psi$  に対応する圏の関係性を見出すことよってなされる． $\mathfrak{g}$  が  $B_n$  型のとき  $\tilde{\mathfrak{g}}$  は  $A_{2n-1}$  型であるが，以下ではこの型を強調して  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} = \mathcal{C}_{B_n}$ ,  $\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}} = \mathcal{C}_{A_{2n-1}}$  のように書くことにする．Kashiwara–Kim–Oh による次の結果は，実際に圏  $\mathcal{C}_{B_n}$  の  $\mathcal{C}_{A_{2n-1}}$  の間に強い関係性があることを示していた．

**定理 3.3** (Kashiwara–Kim–Oh [10])． $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$  が  $(B_n, A_{2n-1})$  型のとき， $\mathcal{T}$  を  $GL$  型アフィン Hecke 環の表現たちから生じる適当なモノイダル圏として，2つのモノイダル完全関手

$$\mathcal{C}_{B_n} \leftarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}_{A_{2n-1}}, \quad (4)$$

が存在する．これらは環同型

$$F: K(\mathcal{C}_{B_n}) \simeq K(\mathcal{C}_{A_{2n-1}})$$

を導き，既約表現の同型類の 1:1 対応を与える．

我々は定理 3.3 の同型  $F$  と定理 3.1 の同型  $\Psi$  を比較することで以下の結果を得た．

**定理 3.4** ([9, 6])．以下の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} K_t(\mathcal{C}_{B_n}) & \xrightarrow{\Psi} & K_t(\mathcal{C}_{A_{2n-1}}) \\ t=1 \downarrow & & \downarrow t=1 \\ K(\mathcal{C}_{B_n}) & \xrightarrow{F} & K(\mathcal{C}_{A_{2n-1}}). \end{array}$$

特に  $\mathfrak{g}$  が  $B$  型のとき，任意の  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  について等式 (3) は正しい．

\*2 コア部分圏については第 67 回代数学シンポジウムの直井克之氏の講演 [17] でも解説されている．

同型  $F$  と同型  $\Psi$  の構成は独立であり、したがって定理 3.4 が非自明な主張であることに注意する。

**注意 3.5.**  $\mathfrak{g}$  が CFG 型の場合には定理 3.3 のような圏間の関係性は現時点で知られていない。コア部分圏と呼ばれる圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  の部分圏に制限すれば類似の結果がある（例えば [17] を参照）のだが、残念ながらそれは Kazhdan–Lusztig 型予想を解決するためには十分でない。

## 4 量子団代数を用いた解釈

本節では到達可能表現に対する Kazhdan–Lusztig 予想をどのように証明するか説明する。これは圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  の良い部分圏が団代数のモノイダル圏化を与えているという事実を本質的に用いて証明される。そこでまずその良い部分圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^- \subset \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  を導入する。

### 4.1 Hernandez–Leclerc の部分圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$

パリティ関数  $\varepsilon: I \rightarrow \{0, 1\}$  であって、Dynkin 図形において  $i$  と  $j$  が隣接するならば  $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_j + \min(d_i, d_j) \pmod{2}$  を満たすものを一つ固定する。そのようなパリティ関数の選び方は 2 通りしかなく、取り方の違いは以下の議論において本質的でない。

**定義 4.1** (Hernandez–Leclerc [8]). 圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$  を圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  の Serre 部分圏として以下の条件で定義する：

$$L(\lambda) \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^- \iff \lambda \in (\mathcal{P}^+)^- := \bigoplus_{i \in I, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_{i, q^{-\varepsilon_i - 2k}}.$$

圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$  は圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  のモノイダル部分圏であるが、これは次の事実により圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  のモノイダル圏としての情報を本質的にすべて含んでいると言える。

**命題 4.2.** 圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  の任意の素 (prime) な既約表現は、適切にスペクトル変数シフト  $\sigma_c: L(\varpi_{i,a}) \mapsto L(\varpi_{i,ca})$  を施せば圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$  に入る。（ここで既約表現が素であるとは 2 つ以上の非自明な既約表現のテンソル積と同型にならないことをいう。）

### 4.2 団代数と籠の変異

モノイダル圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$  はある団代数 (cluster algebra) のモノイダル圏化を与える。その意味を説明するために、ここで団代数についての予備知識をごく簡単に述べておく。

ループおよび有向 2 サイクルを持たない籠  $Q$  に付随して、団代数  $A(Q)$  が定義される。これは有理関数体  $\mathbb{Q}(x_i \mid i \in Q_0)$  の部分環である。ここで  $Q_0$  は籠  $Q$  の頂点集合である。本稿では団代数  $A(Q)$  の具体的な定義などについては立ち入らない。後で必要となる以下の事実だけをpushしておく。

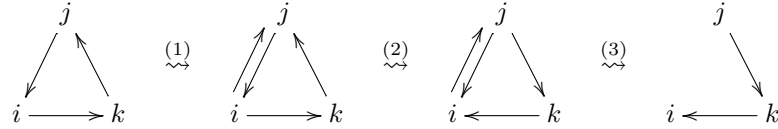
- $A(Q)$  は団単項式 (cluster monomial) からなる  $\mathbb{Z}$  上線形独立な部分集合 CM を持つ。
- 集合 CM の極大積閉部分集合は「団」と呼ばれる\*3。例えば変数  $x_i$  ( $i \in Q_0$ ) たちの単項式のなす集合  $\{\prod_{i \in Q_0} x_i^{n_i} \mid (n_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}\}$  は 1 つの「団」であり、これを「初期団 (initial cluster)」と呼ぶ。任意の

\*3 普通、団 (cluster) といえばそのような極大積閉部分集合の中の既約元 (団変数) の集合の方を指すので、ここでの「団」の用法はその意味で正しくない。その弁解の意も込めて「」をつけている。

「団」は「初期団」から変異 (mutation) と呼ばれる  $\mathbb{Q}(x_i \mid i \in Q_0)$  上の双有理変換を有限回合成して得られる。

- 変異はまた簇の変異と呼ばれる組合せ論的手続きを伴って帰納的に定義される。一般に、簇  $Q$  の頂点  $k \in Q_0$  における変異は、以下の3つの操作からなる：

- (1) 各部分簇  $(i \rightarrow k \rightarrow j) \subset Q$  ごとに新しい矢  $i \rightarrow j$  を加える；
- (2) 頂点  $k$  に接するすべての矢の向きを反転する；
- (3) 2 サイクルを生じた場合、それを取り除く。



これによって得られた簇を  $\mu_k Q$  と書く。このとき、団代数の定義より以下のような可換図式がある：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}(x_i)_{i \in Q_0} & \xrightarrow{\text{変異}} & \mathbb{Q}(x_i)_{i \in Q_0} \\
 \cup & & \cup \\
 A(\mu_k Q) & \xrightarrow{\cong} & A(Q) \\
 \cup & & \cup \\
 \text{CM} & \xrightarrow{1:1} & \text{CM}.
 \end{array} \tag{5}$$

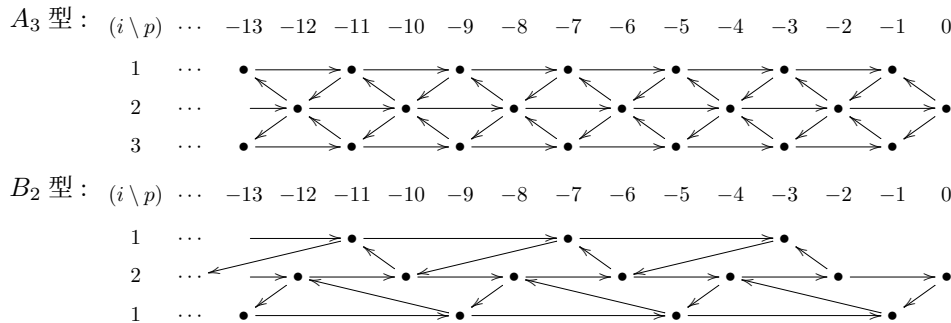
有理関数体  $\mathbb{Q}(x_i \mid i \in Q_0) = \text{Frac} \mathbb{Z}[x_i^{\pm 1} \mid i \in Q_0]$  を適当な量子トーラスの分数体に置き換えることによって、量子団代数  $A_t(Q)$  の概念も定義される。もちろん図式 (5) の  $t$  類似も存在する。

### 4.3 モノイダル圏化定理とその量子化

**定義 4.3** ([8]). 単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に付随して、(無限) 簇  $\Gamma_{\mathfrak{g}}^-$  を次で定める：

- 頂点集合  $(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-)_0 := \{(i, -\varepsilon_i - 2k) \mid i \in I, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ ;
- 矢はすべて重複度 1 であり、 $(i, p) \rightarrow (j, s) \iff c_{ij} \neq 0 \ \& \ s - d_j = p - d_i + d_i c_{ij}$ .

**例 4.4** ( $A_3$  型 &  $B_2$  型).



以上の準備の下で、圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$  に関するモノイダル圏化定理を述べることができる。

**定理 4.5** (Kashiwara–Kim–Oh–Park [12], Hernandez–Leclerc 予想 [8]). 圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$  は団代数  $A(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-)$  のモノイダル圏化を与える、すなわち次のような同型がある：

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\eta}_{\mathfrak{g}}: A(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-) & \xrightarrow{\cong} & K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-) \\
 \cup & & \cup \\
 \text{CM} & \hookrightarrow & \text{irr } \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-.
 \end{array}$$

**定義 4.6.**  $\bar{\eta}_{\mathfrak{g}}(\text{CM})$  に属する既約表現は到達可能 (reachable) であるという.

**注意 4.7.** 1つの「団」に属する到達可能表現たちの任意のテンソル積は既約となり、したがってそれらは特にテンソル積に関して可換な既約表現の族を成す. こうして得られる既約表現の可換族は極大な族であることも知られている ([11]). その意味で定理 4.5 は圏  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$  における既約表現のテンソル積がいつ可換になるかを (少なくとも部分的に) 記述するものだと思うことができる.

我々はモノイダル圏化定理 4.5 の  $t$  類似にあたる次の主張を証明した.

**定理 4.8** ([5]). 団代数  $A(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-)$  は量子団代数  $A_t(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-)$  にアップグレードされ,

$$\begin{aligned} \eta_{\mathfrak{g}}: A_t(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-) &\xrightarrow{\cong} K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-) \\ \text{CM}_t &\hookrightarrow \{L_t(\lambda)\}_{\lambda \in (\mathcal{P}^+)^-} \end{aligned}$$

なる  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数の同型  $\eta_{\mathfrak{g}}$  であって,  $\eta_{\mathfrak{g}}|_{t=1} = \bar{\eta}_{\mathfrak{g}}$  を満たすものが存在する.

**系 4.9.** 等式 (3) は任意の到達可能な既約表現  $L(\lambda)$  について正しい.

定理 4.8 の証明には, 同型  $\Psi$  の団代数解釈 (以下の定理 4.10) を本質的に用いる.

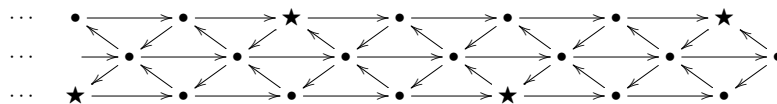
#### 4.4 同型 $\Psi$ の量子団代数を用いた解釈

以下,  $\mathfrak{g}$  を BCFG 型 Lie 代数,  $\tilde{\mathfrak{g}}$  をその展開 ADE 型 Lie 代数とする. 先述の同型  $\Psi$  (の制限) は  $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-)$  と  $K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}^-)$  の同型を導く.

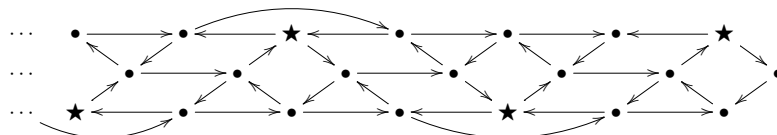
**定理 4.10** ([5]). ある変異の (無限) 列から決まる量子団代数の間の同型  $\Phi: A_t(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-) \xrightarrow{\cong} A_t(\Gamma_{\tilde{\mathfrak{g}}}^-)$  であって, 次の図式を可換にするものが存在する:

$$\begin{array}{ccc} A_t(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-) & \xrightarrow{\Phi} & A_t(\Gamma_{\tilde{\mathfrak{g}}}^-) \\ \eta_{\mathfrak{g}} \downarrow & & \downarrow \eta_{\tilde{\mathfrak{g}}} \\ K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-) & \xrightarrow{\Psi} & K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}^-). \end{array}$$

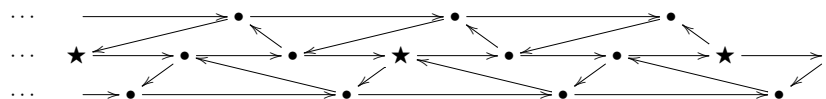
**例 4.11.** 例えば  $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$  が  $(B_2, A_3)$  型のを考える. 籠  $\Gamma_{A_3}^-$  から出発して



★ でマークされた頂点にて変異を施すと,



を得る. これは籠  $\Gamma_{B_2}^-$



に一致する.

#### 4.5 応用：置換公式

主定理 2.4 の証明とは直接関係ないが、定理 4.10 の応用として、次のような興味深い結果が得られる.

**定理 4.12** ([5]).  $\mathbb{Q}(t^{1/2})$  上の斜体の同型  $\tilde{\Psi}: \text{Frac}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t}) \xrightarrow{\sim} \text{Frac}(\mathcal{Y}_{\tilde{\mathfrak{g}},t})$  であって、次の図式を可換にするものが存在する：

$$\begin{array}{ccc} \text{Frac}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t}) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \text{Frac}(\mathcal{Y}_{\tilde{\mathfrak{g}},t}) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t} & & \mathcal{Y}_{\tilde{\mathfrak{g}},t} \\ \cup & & \cup \\ K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\Psi} & K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}). \end{array}$$

特に、同型  $\tilde{\Psi}$  は既約  $(q, t)$ -指標の  $1:1$  対応を導く.  $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$  が  $(B_n, A_{2n-1})$  型のときは、 $\tilde{\Psi}|_{t=1}$  は既約  $q$ -指標の  $1:1$  対応を導く.

**例 4.13.** 再び  $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$  が  $(B_2, A_3)$  型のときを考える. 先述の例 4.11 から、以下の双有理変換が得られる.

$$\tilde{\Psi}|_{t=1}(Y_{i,p}) = \begin{cases} Y_{1,-3-8m}Y_{1,-1-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-3-12m), \\ Y_{1,-5-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-7-12m), \\ Y_{1,-7-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-11-12m), \\ Y_{2,-8m} & \text{if } (i,p) = (2,-12m), \\ Y_{2,-2-8m}Y_{1,-1-8m}^{-1} + Y_{1,-3-8m} & \text{if } (i,p) = (2,-2-12m), \\ (Y_{1,-1-8m}^{-1} + Y_{2,-2-8m}Y_{1,-3-8m})^{-1} & \text{if } (i,p) = (2,-4-12m), \\ Y_{2,-4-8m} & \text{if } (i,p) = (2,-6-12m), \\ Y_{3,-7-8m} + Y_{2,-6-8m}Y_{3,-5-8m}^{-1} & \text{if } (i,p) = (2,-8-12m), \\ (Y_{2,-6-8m}^{-1}Y_{3,-7-8m} + Y_{3,-5-8m}^{-1})^{-1} & \text{if } (i,p) = (2,-10-12m), \\ Y_{3,-1-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-1-12m), \\ Y_{3,-3-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-5-12m), \\ Y_{3,-7-8m}Y_{3,-5-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-9-12m). \end{cases}$$

ここで  $m \in \mathbb{Z}$  であり、簡単のため  $Y_{i,p} := Y_{i,q^p}$  とおいた. 例えば、 $B_2$  型の 5 次元基本表現の  $q$ -指標

$$\chi_q(L_{B_2}(\varpi_{1,q^{-7}})) = Y_{1,-7} + Y_{2,-6}Y_{2,-4}Y_{1,-3}^{-1} + Y_{2,-6}Y_{2,-2}^{-1} + Y_{1,-5}Y_{2,-4}^{-1}Y_{2,-2}^{-1} + Y_{1,-1}^{-1}$$

は変換  $\tilde{\Psi}|_{t=1}$  の下で、

$$\begin{aligned} & Y_{1,-5} + \frac{Y_{2,-4}}{(Y_{1,-1}^{-1} + Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3})Y_{1,-3}Y_{1,-1}} + \frac{Y_{2,-4}}{Y_{2,-2}Y_{1,-1}^{-1} + Y_{1,-3}} + \frac{Y_{3,-3}(Y_{1,-1}^{-1} + Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3})}{Y_{2,-2}Y_{1,-1}^{-1} + Y_{1,-3}} + Y_{3,-1}^{-1} \\ &= Y_{1,-5} + Y_{2,-4} \frac{Y_{1,-3}^{-1}Y_{1,-1}^{-1} + Y_{2,-2}^{-1}}{Y_{1,-1}^{-1} + Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3}} + Y_{3,-3}Y_{2,-2}^{-1} + Y_{3,-1}^{-1} \\ &= Y_{1,-5} + Y_{2,-4}Y_{1,-3}^{-1} + Y_{3,-3}Y_{2,-2}^{-1} + Y_{3,-1}^{-1} \end{aligned}$$

に写る. これは  $A_3$  型の 4 次元基本表現の  $q$  指標  $\chi_q(L_{A_3}(\varpi_{1,q^{-5}}))$  にほかならない.

## 謝辞

本稿は 2023 年 8–9 月に名古屋大学で行われた第 68 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演内容をまとめたものである。講演の機会を与えてくださりシンポジウムの運営にご尽力された世話人の先生方に深く御礼申し上げます。本稿の内容に関する筆者の研究は日本学術振興会海外特別研究員制度および科研費 (No. 23K12955) の助成を受けています。

## 参考文献

- [1] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 142(2):261–283, 1991.
- [2] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras and their representations. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of *CMS Conf. Proc.*, pages 59–78. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [3] Edward Frenkel and Evgeny Mukhin. Combinatorics of  $q$ -characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 216(1):23–57, 2001.
- [4] Edward Frenkel and Nicolai Reshetikhin. The  $q$ -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of  $\mathcal{W}$ -algebras. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, volume 248 of *Contemp. Math.*, pages 163–205. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [5] Ryo Fujita, David Hernandez, Se-jin Oh, and Hironori Oya. Isomorphisms among quantum grothendieck rings and cluster algebras. preprint. arxiv:2304.02562v2.
- [6] Ryo Fujita, David Hernandez, Se-jin Oh, and Hironori Oya. Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and propagation of positivity. *J. Reine Angew. Math.*, 785:117–185, 2022.
- [7] David Hernandez. Algebraic approach to  $q, t$ -characters. *Adv. Math.*, 187(1):1–52, 2004.
- [8] David Hernandez and Bernard Leclerc. A cluster algebra approach to  $q$ -characters of Kirillov-Reshetikhin modules. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 18(5):1113–1159, 2016.
- [9] David Hernandez and Hironori Oya. Quantum Grothendieck ring isomorphisms, cluster algebras and Kazhdan-Lusztig algorithm. *Adv. Math.*, 347:192–272, 2019.
- [10] Masaki Kashiwara, Myungho Kim, and Se-jin Oh. Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type A and B. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 118(1):43–77, 2019.
- [11] Masaki Kashiwara, Myungho Kim, Se-jin Oh, and Euiyong Park. Monoidal categorification and quantum affine algebras. *Compos. Math.*, 156(5):1039–1077, 2020.
- [12] Masaki Kashiwara, Myungho Kim, Se-jin Oh, and Euiyong Park. Monoidal categorification and quantum affine algebras II. Preprint, arxiv:2103.10067v3, 2021.
- [13] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53(2):165–184, 1979.
- [14] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and  $t$ -analogs of  $q$ -characters of quantum affine algebras. *Ann. of Math. (2)*, 160(3):1057–1097, 2004.

- [15] M. Varagnolo and E. Vasserot. Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings. In *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)*, volume 210 of *Progr. Math.*, pages 345–365. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.
- [16] 大矢 浩徳. 「非対称型量子ループ代数の既約表現の  $q$  指標について」. 第 64 回代数学シンポジウム報告集.
- [17] 直井 克之. 「一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性と圏同値」. 第 67 回代数学シンポジウム報告集.