Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性について

藤田 遼 (Ryo Fujita)*

2018 年 3 月

1 はじめに

Schur-Weyl 双対性は，単純な構成から A 型 Lie 代数の表現論と対称群の表現論との間の強い結びつきが生じる大変興味深い現象であり，現在に至るまでその様々な変種が研究されてきた．量子アフィン Schur-Weyl 双対性はそのような変種のひとつであり，量子アフィン化された対象, すなわち A 型量子アフィン代数の表現論と GL 型アフィン Hecke 環の表現論を結びつけるものである．近年，この量子アフィン Schur-Weyl 双対性をさらに一般化したいくつかの変種たちが，Kang-柏原-Kim-Oh らのグループによる一連の研究 [9], [10], [11], [12] で新しく発見された．これら一般化された量子アフィン Schur-Weyl 双対性は（A 型とは限らない）量子アフィン代数の表現論と箙 Hecke 環（KLR 代数）の表現論を結びつけるものであり，団代数のモノイダル圏化やある種の Langlands 双対性とも関連して現在も研究が進んでいる．本稿ではそれらのうち，Dynkin 箙に付随して構成される場合（Kang-柏原-Kim [10]）について取り上げる．ここでは，特にこの場合を「Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性」と呼ぶことにし，通常の量子アフィン Schur-Weyl 双対性と比較しながらその概要を説明したい．

本稿の構成は以下のとおりである．2 節ではまず古典的な Schur-Weyl 双対性の簡単なまとめからはじめて，通常の量子アフィン Schur-Weyl 双対性について説明する．その後，3 節において Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性の Kang-柏原-Kim による代数的構成とその性質を説明する．最後の 4 節では（通常の，および Dynkin 箙型）量子アフィン Schur-Weyl 双対性の幾何学的実現について説明する．

2 量子アフィン Schur-Weyl 双対性

2.1 古典的 Schur-Weyl 双対性

まず始めに，古典的 Schur-Weyl 双対性について簡単にまとめておく．自然数の組 (n, d) を固定する．古典的 Schur-Weyl 双対性は A_n 型複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_{n+1} \equiv \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ の表現論と d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ の表現論を結びつける．その構成は非常に単純である．Lie 代数 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ のベクトル表現 $V := \mathbb{C}^{n+1}$ の d 次テンソル冪 $V^{\otimes d}$ には，対称群 $\mathfrak{S}_d$ がテンソル成分の置換として $\mathfrak{sl}_{n+1}$ 作用と可換であるように作用する．環論の言葉で言い表すと，すなわちテンソル積 $V^{\otimes d}$ は $(U(\mathfrak{sl}_{n+1}), \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d])$ 双加群をなす：

$$U(\mathfrak{sl}_{n+1}) \quad \curvearrowright \quad V^{\otimes d} \quad \curvearrowleft \quad \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d].$$

* 京都大学大学院理学研究科数学教室，E-mail:rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

双加群 $V^{\otimes d}$ は有限次元左加群圏の間の関手を引き起こす：

$$F_{n,d} : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \to U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}; \quad M \mapsto V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]} M.$$

この関手の振舞いは非常に良い．よく知られているように $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ の既約表現（の同型類）は d の分割によって，$U(\mathfrak{sl}_{n+1})$ の有限次元既約表現（の同型類）は長さ n 以下の分割によってそれぞれ適切にラベルされる．関手 $F_{n,d}$ は長さ n 以下の d の分割をラベルに持つ $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ の既約表現を同じラベルを持つ $U(\mathfrak{sl}_{n+1})$ の既約表現に送り，それ以外の既約表現を 0 に送ることが知られている．有限次元加群圏 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]\text{-mod}_{\mathrm{fd}}, U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ がともに半単純であることを踏まえると，これは関手 $F_{n,d}$ が，すべての組成因子が長さ n 以下の d の分割でラベルされるような表現全体のなす $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ の充満部分圏上で充満忠実であることを主張している．また，d に関して直和をとって得られる関手

$$F_n := \bigoplus_d F_{n,d} : \bigoplus_d \mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \to U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$$

はモノイダルであることが構成からすぐにわかる．ここで，左辺には放物型部分群からの誘導 $M \odot M' := \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{d+d'}] \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_{d'}]} (M \boxtimes M')$ によってモノイダル圏の構造を入れる．関手 F_n がモノイダルであるとは，具体的には $F_{n,d+d'}(M \odot M') = F_{n,d}(M) \otimes F_{n,d'}(M')$ が成り立つことである．

2.2 量子アフィン化

引き続き，自然数の組 (n, d) を固定する．古典的 Schur-Weyl 双対性において，$U(\mathfrak{sl}_{n+1})$ および $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ をそれぞれの量子アフィン化に置き換えて得られるのが量子アフィン Schur-Weyl 双対性であり，以下これを説明する．本稿を通して，量子化のパラメータ $q \in \mathbb{C}^\times$ は 1 の冪根でないとする．

まず，$U(\mathfrak{sl}_{n+1})$ の量子アフィン化は，アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ の量子包絡代数 $U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ であり，量子アフィン代数とも呼ばれる．これは Chevalley 型の生成元 $e_i, f_i, k_i^{\pm 1} (i \in \{0, 1, \cdots, n\})$ と関係式によって定義される $\mathbb{C}$ 上の Hopf 代数である[*1]．余積 $\Delta : U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \to U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \otimes U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ は

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes k_i^{-1} + 1 \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + k_i \otimes f_i, \quad \Delta(k_i) = k_i \otimes k_i$$

と定義され，特に非余可換である．元 $C := k_0 k_1 \cdots k_n$ は $U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の中心に属する．本稿では中心元 C の作用が 1 であるような量子アフィン代数 $U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の表現（=レベル 0 表現）のみを考える．例えば，$U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の有限次元表現はすべてレベル 0 表現であることが知られている．したがって，$U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の代わりに対応する商代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1}) := U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})/\langle C - 1 \rangle$ を考えてもよい．これはループ Lie 代数 $L\mathfrak{sl}_{n+1} := \mathfrak{sl}_{n+1} \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ の普遍包絡代数の q 変形とみなすことができるので，量子ループ代数と呼ばれる．

ベクトル空間 $\mathbb{V} := V \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ に量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})$ の作用を入れて，$\mathfrak{sl}_{n+1}$ のベクトル表現 V の量子アフィン化が得られる．Chevalley 生成元の作用は，$\{u_i\}_{i=1}^{n+1}$ を $V = \mathbb{C}^{n+1}$ の標準基底，$a(z) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ とし，添え字 i, j はすべて剰余環 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ の元とみなした上で，次で与えられる：

$$\begin{aligned} e_i(u_j \otimes a(z)) &= \delta_{i,j-1} u_{j-1} \otimes z^{\delta_{i0}} a(z), \\ f_i(u_j \otimes a(z)) &= \delta_{ij} u_{j-1} \otimes z^{-\delta_{i0}} a(z), \\ k_i(u_j \otimes a(z)) &= \begin{cases} q u_i \otimes a(z) & \text{if } i = j; \\ q^{-1} u_j \otimes a(z) & \text{if } i = j+1; \\ u_j \otimes a(z) & \text{else.} \end{cases} \end{aligned}$$

[*1] ここではいわゆる degree operator q^d は考えない．

他方，$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ の量子アフィン化は GL_d 型のアフィン Hecke 環 $H_d^{\mathrm{aff}}(q)$ である．これは，GL_d のアフィン Weyl 群 $\mathbb{Z}^d \rtimes \mathfrak{S}_d$ の群代数 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^d \rtimes \mathfrak{S}_d]$ の q 変形であり，生成元 $T_k\,(1 \leq k < d)$, $X_k^{\pm 1}\,(1 \leq k \leq d)$ と関係式

$$\begin{array}{ll} (T_k+1)(T_k-q)=0, & T_kT_{k+1}T_k = T_{k+1}T_kT_{k+1}, \\ T_kT_j = T_jT_k\ (|k-j|>1), & X_kX_j = X_jX_k, \\ T_kX_kT_k = qX_{k+1}, & T_kX_j = X_jT_k\ (j \neq k, k+1), \end{array}$$

で定義される $\mathbb{C}$ 代数である．ここで $q \mapsto 1$, $T_k \mapsto s_k$ （ただし s_k は k と $k+1$ の互換）とすれば，確かに $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^d \rtimes \mathfrak{S}_d]$ の関係式が得られる．アフィン Hecke 環 $H_d^{\mathrm{aff}}(q)$ の有限次元既約表現（の同型類）は多重セグメントと呼ばれる組み合わせ論的対象でラベルづけられることがよく知られている (Zelevinsky [19]).

量子アフィン Schur-Weyl 双対性においては，$U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})$ の表現 $\mathbb{V}$ の d 次テンソル冪 $\mathbb{V}^{\otimes d}$ にアフィン Hecke 環 $H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2})$ の右作用を入れて，$(U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1}), H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2}))$ 双加群を構成する．以下，k 番目のテンソル成分 $\mathbb{V} = V \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ における変数 z を z_k と書いて，$\mathbb{V}^{\otimes d} = V^{\otimes d} \otimes \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_d^{\pm 1}]$ と同一視する．Lie 代数の時とは違い，余積 Δ は非余可換であるから，テンソル成分の置換は $U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})$ 作用と可換でない．それに代わるものとして $U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})$ 準同型 $R : \mathbb{V}^{\otimes 2} \to \mathbb{V}^{\otimes 2}$ で，各 $a(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]$ に対して $R \circ a(z_1, z_2) = a(z_2, z_1) \circ R$ を満たすものを考えよう．これを R 行列と呼ぶ．しかし，以上の条件だけでは不定性が残るので，正規化条件 $R(u_1 \otimes u_1) = u_1 \otimes u_1$ も課す．すると，R は次のように一意的に決まることが直接計算で確かめられる：

$$R(u_i \otimes u_j) := \begin{cases} u_i \otimes u_i & i=j; \\ \frac{q(z_1/z_2-1)}{z_1/z_2-q^2} u_j \otimes u_i + \frac{1-q^2}{z_1/z_2-q^2} u_i \otimes u_j & i<j; \\ \frac{q(z_1/z_2-1)}{z_1/z_2-q^2} u_j \otimes u_i + \frac{(1-q^2)z_1/z_2}{z_1/z_2-q^2} u_i \otimes u_j & i>j, \end{cases}$$

ただし，この表式から分かるように，正規化された R 行列は $z_1/z_2 = q^2$ に 1 位の極を持つ．特に，そのままでは $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ 上の自己線形写像として well-defined でないので注意する必要がある．

さて，$\mathbb{V}^{\otimes d}$ 上にアフィン Hecke 環 $H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2})$ の右作用を正規化された R 行列を用いて以下のように定義できる：

$$X_k \mapsto z_k, \quad T_k \mapsto \frac{q^{-2}z_k/z_{k+1}-1}{z_k/z_{k+1}-1} R_{k,k+1} - \frac{1-q^{-2}}{z_k/z_{k+1}-1}\mathrm{id}.$$

ただし，ここで $R_{k,k+1} := \mathrm{id}^{\otimes(k-1)} \otimes R \otimes \mathrm{id}^{\otimes(d-k-1)}$ とする．このように与えられる T_k の作用が $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ 上の自己線形写像として well-defined であることは非自明であるが，今の場合は R 行列の形が具体的にわかっているので少しの計算でチェックできる．この $H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2})$ 作用は $U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})$ 作用と可換であり，結果として $\mathbb{V}^{\otimes d}$ は $(U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1}), H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2}))$ 双加群をなす：

$$U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1}) \quad \curvearrowright \quad \mathbb{V}^{\otimes d} \quad \curvearrowleft \quad H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2}).$$

古典的 Schur-Weyl 双対性の時と同様，以下の性質が示される．

定理 2.1 (Chari-Pressley [2])．双加群が誘導する有限次元加群圏の間の関手

$$\mathscr{F}_{n,d} : H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2})\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \to U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}; \quad M \mapsto \mathbb{V}^{\otimes d} \otimes_{H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2})} M$$

について以下の事実が成り立つ．

(1) 関手 $\mathscr{F}_{n,d}$ は，すべての組成因子が長さ n 以下のセグメントからなる多重セグメントをラベルに持つ既約表現に同型であるような表現全体のなす $H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2})$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fd}}$ の充満部分圏上で充満忠実である．

(2) 直和 $\bigoplus_d \mathscr{F}_{n,d} : \bigoplus_d H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2})\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \to U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ はモノイダル関手である．ただし，左辺のモノイダル圏構造は放物型部分環 $H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2}) \boxtimes H_{d'}^{\mathrm{aff}}(q^{-2}) \subset H_{d+d'}^{\mathrm{aff}}(q^{-2})$ からの誘導で定める．

注意 2.2. (2) のモノイダル性は構成からほとんど明らかである．(1) については，古典的 Schur-Weyl 双対性の場合と異なり，加群圏 $H_d^{\mathrm{aff}}(q)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}, U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ がともに半単純でないことに注意を要する．特に，既約表現の行き先を見ただけでは関手の充満忠実性を結論できない．

3 Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性

この節では Kang-柏原-Kim [10] による Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性について，特に双加群の代数的な構成と関手の性質について説明しよう．$\mathsf{X} = \mathsf{A}, \mathsf{D}, \mathsf{E}$ のいずれかとし，$Q = (I, \Omega)$ を X_n 型 Dynkin 図形の各辺に向きを与えて得られる Dynkin 箙とする．ここで $I := \{1, 2, \ldots, n\}$ は頂点の集合，Ω は矢の集合を表す．また，$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ を X_n 型 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の単純ルートの集合，$\mathsf{Q}^+ := \sum_{i\in I} \mathbb{N}\alpha_i$ を単純ルートの生成する自由可換モノイドとする．

前節で最初に固定したデータ (n, d) の代わりに，ここでは Dynkin 箙 Q と単純ルートの和 $\beta = \sum_{i\in I} d_i\alpha_i \in \mathsf{Q}^+$ の組 (Q, β) から出発する．配役は次のように変わる：

$$\begin{array}{ccl} U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1}) & \rightsquigarrow & \mathsf{X}_n \text{ 型の量子ループ代数 } U_q(L\mathfrak{g})\text{；} \\ H_d^{\mathrm{aff}}(q) & \rightsquigarrow & (Q,\beta) \text{ に付随する箙 Hecke 環（の完備化）} \widehat{H}_Q(\beta). \end{array}$$

Kang-柏原-Kim [10] では，道代数 $\mathbb{C}Q$ の Auslander-Reiten 箙のデータを用いて適切な $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ を用意し，そこへの $\widehat{H}_Q(\beta)$ 作用を正規化された R 行列を用いて，「条件」付きで構成した．「条件」については 3.2 節で詳しく述べるが，R 行列の極の位数に関するものであり，$\widehat{H}_Q(\beta)$ 作用が well-defined であることを示すために必要であった．Kang-柏原-Kim はこの「条件」が常に正しいことを予想とし，$\mathsf{X} = \mathsf{A}, \mathsf{D}$ の場合には証明を与えた．残りの $\mathsf{X} = \mathsf{E}$ の場合についてはしばらく未解決であったが，最近 Oh-Scrimshaw [16] および筆者 [5] によって証明された．いずれにせよ，実際に双加群

$$U_q(L\mathfrak{g}) \quad \curvearrowright \quad \widehat{V}^{\otimes\beta} \quad \curvearrowleft \quad \widehat{H}_Q(\beta)$$

は構成でき，これは通常の量子アフィン Schur-Weyl 双対性と同様に非常に良い性質を示す．

定理 3.1 (Kang-柏原-Kim [10])**.** 双加群が誘導する有限次元加群圏の間の関手

$$\mathscr{F}_{Q,\beta} : \widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \to U_q(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}; \quad M \mapsto \widehat{V}^{\otimes\beta} \otimes_{\widehat{H}_Q(\beta)} M$$

について以下の事実が成り立つ．

(1) 関手 $\mathscr{F}_{Q,\beta}$ は完全であり，$\widehat{H}_Q(\beta)$ の各既約表現を $U_q(L\mathfrak{g})$ の互いに非同型な有限次元既約表現に送る．

(2) 直和 $\mathscr{F}_Q := \bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}^+} \mathscr{F}_{Q,\beta} : \bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}^+} \widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \to U_q(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ はモノイダル関手である．ただし，左辺のモノイダル圏構造は放物型部分環 $\widehat{H}_Q(\beta) \boxtimes \widehat{H}_Q(\beta') \subset \widehat{H}_Q(\beta+\beta')$ からの誘導で定める．

定理 3.2 (F. [4], [5])**.** 関手 $\mathscr{F}_{Q,\beta}$ は充満忠実である．

以下，やや細かい注意を述べる．

注意 3.3. Kang-柏原-Kim の定理 3.1(1) は実はもっと強い主張である．それを説明するためには，Hernandez-Leclerc の研究 [8] に言及する必要がある．Hernandez-Leclerc [8] は，各 Dynkin 箙 Q に対して良いモノイダル部分圏 $\mathcal{C}_Q \subset U_q(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ を定義し，その Grothendieck 環 $K_0(\mathcal{C}_Q)$ が $\mathfrak{g}$ に付随する極大冪単群 N の座標環 $\mathbb{C}[N]$ に同型であり，既約表現のクラスが双対標準基底 (dual canonical basis) に対応することを示した．この圏 $\mathcal{C}_Q$ はモノイダル構造と整合的なブロック分解 $\mathcal{C}_Q = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}^+} \mathcal{C}_{Q,\beta}$ を持つ．Kang-柏原-Kim が実際に証明したことは，各 β に対して関手 $\mathscr{F}_{Q,\beta}$ がブロック $\mathcal{C}_{Q,\beta}$ に値をとり，それが Grothendieck 群の同型 $K_0(\widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}) \cong K_0(\mathcal{C}_{Q,\beta})$ を導くことであった．尚，この事実と定理 3.2 の主張を合わせると，関手 $\mathscr{F}_{Q,\beta}$ が圏同値 $\widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \simeq \mathcal{C}_{Q,\beta}$ を導くことが分かる．

注意 3.4. 注意 2.2 で述べたのと同様に，今の場合に加群圏は半単純でないので，既約表現の行き先を見ただけでは関手の充満忠実性を結論できない．定理 3.2 には今のところ 2 通りの証明が知られている．ひとつは両方の加群圏にアフィン最高ウェイト構造と呼ばれるホモロジー代数的構造を見出しそれらを比較する方法 [4]，もうひとつは 4 節で説明する双加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ の幾何学的実現を用いる方法 [5] である．

以下に続く節 3.1, 3.2 では双加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ の構成についてもう少し具体的に説明する．

3.1 箙 Hecke 環

箙 Hecke 環 $H_Q(\beta)$ は量子群の圏論化の文脈において GL 型アフィン Hecke 環の一般化とみなすべき次数付き代数であり，Khovanov-Lauda [14] および Rouquier [17] によって導入された．KLR 代数とも呼ばれる．

箙 Hecke 環の構造について少し詳しく述べておく．固定した $\beta = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in \mathsf{Q}^+$ に対して $d := \sum_{i \in I} d_i$ とし，有限集合 $I^\beta := \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in I^d \mid \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_d} = \beta\}$ を考える．I^β には対称群 $\mathfrak{S}_d$ が成分の入れ替えで推移的に作用することに注意しておく．箙 Hecke 環 $H_Q(\beta)$ は 3 種類の生成元 $e(\mathbf{i})\,(\mathbf{i} \in I^\beta)$，$x_k\,(1 \le k \le d)$，$\tau_k\,(1 \le k < d)$ と関係式で定義される $\mathbb{C}$ 代数である．生成元 $e(\mathbf{i})$ は互いに直交する冪等元であり 1 を分割する，すなわち $e(\mathbf{i})e(\mathbf{i}') = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'}e(\mathbf{i}), \sum_{\mathbf{i} \in I^\beta} e(\mathbf{i}) = 1$ を満たす．生成元 x_k は互いに可換かつ $e(\mathbf{i})$ とも可換である．この 2 種類の生成元 $e(\mathbf{i}), x_k$ は多項式環の I^β 直和と同型な $H_Q(\beta)$ の部分代数 $\bigoplus_{\mathbf{i} \in I^\beta} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]e(\mathbf{i})$ を生成する．生成元 τ_k は関係式 $e(\mathbf{i})\tau_k = \tau_k e(s_k \cdot \mathbf{i})$ や組みひも関係式に似た関係式を満たし，アフィン Hecke 環における生成元 T_k と同じような役割を果たす．$H_Q(\beta)$ のほかの定義関係式はやや複雑なのでここでは省略する．$H_Q(\beta)$ は左および右 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 加群として自由であり，対称群の各元 $w \in \mathfrak{S}_d$ の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ を固定した上で $\tau_w := \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_l}$ とおくと，$\{e(\mathbf{i})\tau_w\}_{\mathbf{i} \in I^\beta, w \in \mathfrak{S}_d}$ がその自由基底を与えることが知られている (cf. Khovanov-Lauda [14])．すなわち

$$H_Q(\beta) = \bigoplus_{\mathbf{i} \in I^\beta, w \in \mathfrak{S}_d} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]e(\mathbf{i})\tau_w = \bigoplus_{\mathbf{i} \in I^\beta, w \in \mathfrak{S}_d} \tau_w e(\mathbf{i})\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d].$$

また，箙 Hecke 環は次数付き代数の構造 $H_Q(\beta) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H_Q(\beta)_m$ を持つ．次数は下に有界であることが知られており，したがって次数に関する完備化 $\widehat{H}_Q(\beta) := \prod_{m \in \mathbb{Z}} H_Q(\beta)_m$ も自然に代数になる．これは上の基底表示で言えば，単に多項式環を形式的冪級数環に置き換えて得られるものである：

$$\widehat{H}_Q(\beta) = \bigoplus_{\mathbf{i} \in I^\beta, w \in \mathfrak{S}_d} \mathbb{C}[\![x_1, \dots, x_d]\!]e(\mathbf{i})\tau_w = \bigoplus_{\mathbf{i} \in I^\beta, w \in \mathfrak{S}_d} \tau_w e(\mathbf{i})\mathbb{C}[\![x_1, \dots, x_d]\!].$$

箙 Q が A_n 型の単調箙 $Q = (1 \to 2 \to \cdots \to n)$ のとき，代数 $\widehat{H}_Q(\beta)$ はアフィン Hecke 環 $H_d^{\mathrm{aff}}(q)$ の適当な中心完備化と同型になることが知られている (Brundan-Kleshchev [1])．通常の量子アフィン Schur-Weyl

双対性は，完備化の後この同型を介してこの場合の Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性と一致する．その意味でも Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性が通常の量子アフィン Schur-Weyl 双対性の一般化であると考えるのは自然である．

3.2 Kang-柏原-Kim による双加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ の構成

まず, Dynkin 箙 Q の高さ関数 ξ, すなわち写像 $\xi : I \to \mathbb{Z}; i \mapsto \xi_i$ であって, 各 $h \in \Omega$ に対して $\xi_{h'} = \xi_{h''}+1$ を満たすものをひとつ固定する．ただし，矢 $h \in \Omega$ の始点と終点をそれぞれ $h', h'' \in I$ と書く．高さ関数 ξ は定数関数を加える不定性を除けば箙 Q から一意的に定まり，その不定性は例えば $U_q(L\mathfrak{g})$ の自己同型に吸収できてしまうので以下の構成において本質的でない．

次に，$\mathsf{R}^+ \subset \mathsf{Q}^+$ を正ルートの集合とし，箙 Q の道代数 $\mathbb{C}Q$ の Auslander-Reiten 箙のデータを反映した写像 $\phi : \mathsf{R}^+ \hookrightarrow I \times \mathbb{Z}$ をつくる．それは例えば下の例 3.5 ような格好をしている．ただし，そこにおいて矢印は $\mathbb{C}Q$ の Auslander-Reiten 箙における矢を表し，破線矢印は Auslander-Reiten 変換（あとで述べる Coxeter 元 c の作用）に対応する．

例 3.5. A_3 型の場合．$\mathsf{R}^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, (\alpha_1+\alpha_2), (\alpha_2+\alpha_3), (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\}$ である．

(1) $Q = (1 \to 2 \to 3)$ で高さ関数が $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2, 1, 0)$ であるとき，ϕ は下図のようになる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \arrow[dr] & & \\ & \alpha_2+\alpha_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \alpha_1+\alpha_2 \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & \\ \alpha_3 \arrow[ur] & & \alpha_2 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & \alpha_1 \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd} \quad \overset{\phi}{\mapsto} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & & (3,0) \arrow[dr] & & \\ & (2,-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,1) \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & \\ (1,-2) \arrow[ur] & & (1,0) \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & (1,2) \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

(2) $Q = (1 \to 2 \leftarrow 3)$ で高さ関数が $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2, 1, 2)$ であるとき，ϕ は下図のようになる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \alpha_1+\alpha_2 \arrow[dr] & & \alpha_3 \arrow[ll, dashed] \\ \alpha_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \alpha_2+\alpha_3 \arrow[ur] & & \alpha_1 \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd} \quad \overset{\phi}{\mapsto} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & (3,0) \arrow[dr] & & (3,2) \arrow[ll, dashed] \\ (2,-1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (2,1) \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (1,0) \arrow[ur] & & (1,2) \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

一般には次のように定義する．まず，全順序 $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ を，$\xi_{i_1} \geq \xi_{i_2} \geq \cdots \geq \xi_{i_n}$ を満たすように選び，$\mathfrak{g}$ の Weyl 群 W の Coxeter 元 $c := r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_n}$ を定める．ここで，$r_i \in W$ は $i \in I$ に付随する単純鏡映である．Coxeter 元 c は全順序の選び方には依らず，向き付け Ω だけから決まることが知られている．さらに各 $i \in I$ に対して，正ルート $\gamma_i = \sum_j \alpha_j \in \mathsf{R}^+$ を，Q において j から i に向かう経路が存在するような j に対応する単純ルート α_j たちの和として定義する．このとき，各 $\alpha \in \mathsf{R}^+$ に対して $i \in I$ と整数 $0 \leq m < h$（ただし h は Coxeter 数）で $\alpha = c^m(\gamma_i)$ を満たすものがただひとつ存在することが分かり，これらを用いて $\phi(\alpha) := (i, \xi_i - 2m)$ と定義する．

通常の量子アフィン Schur-Weyl 双対性では $U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1})$ の表現 $\mathbb{V} = V \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ を用いて双加群 $\mathbb{V}^{\otimes d}$ を構成した．Dynkin 箙型の場合には表現 $\mathbb{V}$ の代わりに，各 i に付随する基本ウェイト ϖ_i の大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\varpi_i)$ と呼ばれる $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群の族を用いる．$\mathsf{X} = \mathsf{A}$, $i = 1$ の時 $\mathbb{W}(\varpi_1) = \mathbb{V}$ であるという意味

で，これは表現 $\mathbb{V}$ の一般化である．一般に，標準的な同型 $\mathrm{End}_{U_q(L\mathfrak{g})}(\mathbb{W}(\varpi_i)) \cong \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ があり，$\mathbb{W}(\varpi_i)$ は $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ 加群として有限生成自由であるという点も $\mathbb{V}$ と同様である．また，各 $i, j \in I$ に対して R 行列 $R^{ij} : \mathbb{W}(\varpi_i) \otimes \mathbb{W}(\varpi_j) \to \mathbb{W}(\varpi_j) \otimes \mathbb{W}(\varpi_j)$ を $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ の時と同様に考えることができ，正規化条件を課せば比 z_1/z_2 に関して極を持つことを許した上で一意的に決まる．

さて，以上の準備の下で双加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ の構成を説明する．固定した $i \in I$ に対して，$\phi(\alpha_i) = (j, p) \in I \times \mathbb{Z}$ として，大域 Weyl 加群 $\mathbb{W}(\varpi_j)$ の $z = a_i := q^p$ における完備化 $\widehat{V}_i := \mathbb{W}(\varpi_j) \otimes_{\mathbb{C}[z^{\pm 1}]} \mathbb{C}[\![z - a_i]\!]$ を考える．そして左 $U_q(L\mathfrak{g})$ 加群として $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ を

$$\widehat{V}^{\otimes\beta} := \bigoplus_{\mathbf{i}=(i_1,i_2,\dots,i_d)\in I^\beta} \widehat{V}_{i_1} \hat{\otimes} \widehat{V}_{i_2} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \widehat{V}_{i_d}$$

と定義する[*2]．ここへの箙 Hecke 環 $\widehat{H}_Q(\beta)$ の右作用を以下で定める：

$$v \cdot e(\mathbf{i}') = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'} v \tag{3.1}$$

$$v \cdot x_k = (a_{i_k}^{-1} z_k - 1) v \tag{3.2}$$

$$v \cdot \tau_k = \begin{cases} (a_{i_k}^{-1} z_k - a_{i_{k+1}}^{-1} z_{k+1})^{-1} (R_k^{\mathbf{i}}(v) - v) & \text{if } i_k = i_{k+1}, \\ (a_{i_k}^{-1} z_{k+1} - a_{i_{k+1}}^{-1} z_k) R_k^{\mathbf{i}}(v) & \text{if } i_k \leftarrow i_{k+1} \text{ in } Q, \\ R_k^{\mathbf{i}}(v) & \text{else,} \end{cases} \tag{3.3}$$

ただし，$v \in \widehat{V}_{i_1} \hat{\otimes} \widehat{V}_{i_2} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \widehat{V}_{i_d}, \mathbf{i} = (i_i, i_2, \dots, i_d)$ であるとし，k 番目のテンソル成分に作用する z を z_k と書いた．また，正規化された R 行列を用いて $R_k^{\mathbf{i}} := \mathrm{id}^{\otimes(k-1)} \otimes R^{i_k, i_{k+1}} \otimes \mathrm{id}^{\otimes(d-k-1)}$ とした．式 (3.1) は冪等元 $e(\mathbf{i})$ が $\mathbf{i}$ 直和成分への射影として作用することを意味する．また，箙 Hecke 環の定義関係式 $e(\mathbf{i})\tau_k = \tau_k e(s_k \cdot \mathbf{i})$ から τ_k の作用は $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ の $\mathbf{i}$ 直和成分を $(s_k \cdot \mathbf{i})$ 直和成分へ写さなければならないことにも注意する．

先に述べたように，正規化された R 行列は極を持つので，式 (3.3) で与えられた τ_k の作用が well-defined であることは自明でない．Kang-柏原-Kim は，それを保証するためには次の予想が正しいことをチェックすれば十分であることを示した．

予想 3.6 (Kang-柏原-Kim [10] Conjecture 4.3.2)**.** 各 $i_1, i_2 \in I$ に対し，$\phi(i_1) = (j_1, p_1), \phi(i_2) = (j_2, p_2)$ とおく．このとき正規化された R 行列 R^{j_1, j_2} が点 $q^{p_2 - p_1} (= a_{i_2}/a_{i_1})$ に持つ極の位数は高々 1 である．

この予想はすでに正しいことが証明されている．まず $\mathsf{X} = \mathsf{A}, \mathsf{D}$ の場合は，Kang-柏原-Kim [10] において正規化された R 行列の分母公式が明示的に計算された．$\mathsf{X} = \mathsf{E}$ の時は基本表現が大きいために R 行列の分母の計算がすぐにはできず，しばらく未解決であったが，Oh-Scrimshaw [16] が計算機を用いて正しいことを確かめた．一方，筆者の研究 [5] では，明示的に R 行列の分母を計算するのではなく，双加群を幾何学的に実現するという別のアプローチを介して ADE のすべての場合に統一的な証明を得た．次節ではこの幾何学的実現について説明する．

4　幾何学的構成

ここでは 2 節で説明した量子アフィン Schur-Weyl 双対性および 3 節で説明した Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性の幾何学的実現について説明する．

---

*2　詳細は省くが，$\hat{\otimes}$ は通常のテンソル積をさらに完備化して定義する．

4.1 同変 K 群を用いた双加群のレシピ

まず一般的な設定で双加群の幾何学的構成のアイデアを述べよう．尚，ここで説明する内容の参考文献として [3] を挙げておく．最初に記号を導入する．基礎体は常に複素数体 $\mathbb{C}$ とする．G 多様体 X，すなわち線形代数群 G の代数的作用を持つ準射影的代数多様体 X に対して，その G 同変 K 群（の複素化）を $K^G(X) := K_0(\mathsf{Coh}^G(X)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ と書く．$K^G(X)$ は自然に G の表現環 $R(G) := K_0(\mathsf{Rep}\, G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = K^G(\mathrm{pt})$ 上の加群となる．本稿で実際に扱うのは G がいくつかの $GL_m(\mathbb{C})$ の直積の場合のみである．特に $G = GL_m(\mathbb{C})$ のときは，標準的に $R(G) = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_m^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_m}$ である．

いま，非特異 G 多様体 M_1, M_2, M_3 と閉部分 G 多様体 $Z_{12} \subset M_1 \times M_2, Z_{23} \subset M_2 \times M_3$ を考える．$(i,j) = (1,2),(2,3),(1,3)$ に対して，$p_{ij} : M_1 \times M_2 \times M_3 \to M_i \times M_j$ を対応する成分への射影として，$Z_{12} \circ Z_{23} := p_{13}(p_{12}^{-1}(Z_{12}) \cap p_{23}^{-1}(Z_{23})) \subset M_1 \times M_3$ と定義する．これは Z_{12}, Z_{23} として G 同変射 $f : M_2 \to M_1, g : M_3 \to M_2$ のグラフ $\mathrm{Graph}(f) := \{(f(x), x)\} \subset M_1 \times M_2, \mathrm{Graph}(g) := \{(g(x), x)\} \subset M_2 \times M_3$ をとったときに，$\mathrm{Graph}(f) \circ \mathrm{Graph}(g) = \mathrm{Graph}(f \circ g)$ となることを踏まえた記号である．ここでさらに $p_{13} : p_{12}^{-1}(Z_{12}) \cap p_{23}^{-1}(Z_{23}) \to Z_{12} \circ Z_{23}$ が固有射であると仮定すると，同変 K 群における畳み込み積

$$K^G(Z_{12}) \otimes_{R(G)} K^G(Z_{23}) \xrightarrow{*} K^G(Z_{12} \circ Z_{23}); \qquad [\mathscr{F}] * [\mathscr{E}] := [p_{13*}(p_{12}^* \mathscr{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{M_1 \times M_2 \times M_3} p_{23}^* \mathscr{E})]$$

が定義できる．畳み込み積はしかるべき結合律を満たす．特に $Z_{12} \circ Z_{12} = Z_{12}$ なるとき，$K^G(Z_{12})$ は畳み込み積に関して $R(G)$ 代数になる．さらに加えて $Z_{12} \circ Z_{23} = Z_{23}$ も成り立つなら，$K^G(Z_{23})$ は畳み込み積によって左 $K^G(Z_{12})$ 加群となる．

さて，$i = 1, 2$ に対して，非特異 G 多様体 M_i から G 多様体 N への G 同変固有射 $\pi_i : M_i \to N$ が与えられているとしよう：

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

このとき，各 $i = 1, 2$ に対して，ファイバー積 $Z_i := M_i \times_N M_i \subset M_i \times M_i$ は $Z_i \circ Z_i = Z_i$ を満たし，さらに $Z_1 \circ (M_1 \times_N M_2) = M_1 \times_N M_2 = (M_1 \times_N M_2) \circ Z_2$ も成り立つ．ゆえに，前段落の構成を適用して，$K^G(Z_1), K^G(Z_2)$ はともに畳み込み積に関して $R(G)$ 代数であり，$K^G(M_1 \times_N M_2)$ は畳み込み積に関して $(K^G(Z_1), K^G(Z_2))$ 双加群をなすことが分かる：

$$K^G(Z_1) \quad \curvearrowright \quad K^G(M_1 \times_N M_2) \quad \curvearrowleft \quad K^G(Z_2).$$

以下では，このレシピを具体的な設定に適用する．

4.2 量子アフィン Schur-Weyl 双対性の幾何学的実現

ここでは Ginzburg-Reshetikhin-Vasserot [6] による量子アフィン Schur-Weyl 双対性の幾何学的実現について述べる．自然数の組 (n,d) を固定する．以下の図式に対して 4.1 節のレシピを適用する：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_{n,d} \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{F}_d = T^*\mathcal{B}_d \arrow[dl, "\mu"] \\ & \mathcal{N}_d & \end{tikzcd}$$

記号の意味をひとつずつ説明する．$\mathcal{N}_d := \{x \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^d) \mid x^d = 0\}$ は $d \times d$ 冪零行列の全体であり，

$$\mathcal{B}_d := \{F^\bullet = (\mathbb{C}^d = F^0 \supsetneq F^1 \supsetneq \cdots \supsetneq F^d = 0) \mid F^i \text{ は部分ベクトル空間 }\}$$

は $\mathbb{C}^d$ における旗全体のなす多様体（$GL_d(\mathbb{C})$ の旗多様体）である．旗多様体の余接束 $\mathcal{F}_d := T^*\mathcal{B}_d$ は

$$\mathcal{F}_d = \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_d \times \mathcal{N}_d \mid x(F^{k-1}) \subset F^k,\ 1 \le \forall k \le d\}.$$

と思うことができて，$\mu(F^\bullet, x) = x$ は Springer 特異点解消である．一方，左側の $\mathfrak{M}_{n,d}$ は長さ $n+1$ 以下の部分旗のなす多様体 $\mathcal{B}_{n,d}$ の余接束である．すなわち

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,d} &:= \{F^\bullet = (\mathbb{C}^d = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^{n+1} = 0 \mid F^i \text{ は部分ベクトル空間 }\},\\ \mathfrak{M}_{n,d} &:= T^*\mathcal{B}_{n,d} = \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_{n,d} \times \mathcal{N}_d \mid x(F^{k-1}) \subset F^k,\ 1 \le \forall k \le n+1\},\end{aligned}$$

であって $\pi(F^\bullet, x) = x$ である．多様体 $\mathfrak{M}_{n,d}$ は A_n 型の箙多様体としても実現できる．以上の各多様体には群 $GL_d(\mathbb{C})$ が自然に作用する．加えて，1 次元トーラス $\mathbb{C}^\times$ が $\mathcal{N}_d$ 部分へ $\mathbb{C}^\times \ni t : x \mapsto t^2 x$ で作用する．このとき，π_1, π_2 はともに $\mathbb{G}_d := GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ 作用に関して同変な固有射である．

以下，$q \in \mathbb{C}^\times$ は 1 の冪根でないと仮定する．標準的に $R(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{C}[v^{\pm 1}] =: A$ とみなし，$\mathbb{C}$ を $v \mapsto q$ という特殊化によって A 加群とみなす．

定理 4.1 (Kazhdan-Lusztig [13], Ginzburg, cf. [3])**.** $\mathcal{Z}_d := \mathcal{F}_d \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d$ とおく（Steinberg 多様体）．このとき，$\mathbb{C}$ 代数の同型 $H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2}) \cong K^{\mathbb{G}_d}(\mathcal{Z}_d) \otimes_A \mathbb{C}$ が存在する．

定理 4.2 (Ginzburg-Vasserot [7])**.** $Z_{n,d} := \mathfrak{M}_{n,d} \times_{\mathcal{N}_d} \mathfrak{M}_{n,d}$ とおく．このとき，$\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\Phi : U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1}) \to K^{\mathbb{G}}(Z_{n,d}) \otimes_A \mathbb{C}$ が存在する．

定理 4.3 (Ginzburg-Reshtikhin-Vasserot [6])**.** 同型 $\mathbb{V}^{\otimes d} \cong K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_{n,d} \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{C}$ であって，次の図式を可換にするようなものが存在する：

$$\begin{tikzcd} U_q(L\mathfrak{sl}_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & \mathrm{End}\left(\mathbb{V}^{\otimes d}\right) \arrow[d, "\cong"] & H_d^{\mathrm{aff}}(q^{-2}) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] \\ K^{\mathbb{G}_d}(Z_{n,d}) \otimes_A \mathbb{C} \arrow[r] & \mathrm{End}\left(K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_{n,d} \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{C}\right) & K^{\mathbb{G}_d}(\mathcal{Z}_d) \otimes_A \mathbb{C}, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

ただし，水平の矢印はそれぞれの双加群構造を表す．

4.3 Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性の幾何学的実現

最後に，Ginzburg-Reshetikhin-Vasserot の構成をまねて，Dynkin 箙型量子アフィン Schur-Weyl 双対性の幾何学的実現が得られることを説明する．X_n 型 Dynkin 箙 $Q = (I, \Omega)$ と元 $\beta = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in \mathsf{Q}^+$ からなる組 (Q, β) を固定する．以下の図式に対して 4.1 節のレシピを適用する：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_\beta^\bullet \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{F}_\beta \arrow[dl, "\mu"] \\ & \mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet \cong E_\beta & \end{tikzcd}$$

記号の意味を説明する．まず各 $i \in I$ に対して d_i 次元ベクトル空間 $D_i = \mathbb{C}^{d_i}$ を固定し，I で次数付けられたベクトル空間 $D := \bigoplus_{i \in I} D_i$ を考える．また，前と同じように $d := \sum_{i \in I} d_i = \dim D$ とする．このとき，多様体 $E_\beta, \mathcal{B}_\beta, \mathcal{F}_\beta$ をそれぞれ次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
E_\beta &:= \bigoplus_{h \in \Omega} \mathrm{Hom}(D_{h'}, D_{h''}),\\
\mathcal{B}_\beta &:= \{F^\bullet = (D = F^0 \supsetneq F^1 \supsetneq \cdots \supsetneq F^d = 0) \mid F^k \text{ は } I \text{ 次数付き部分ベクトル空間 }\},\\
\mathcal{F}_\beta &:= \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_\beta \times E_\beta \mid x(F^{k-1}) \subset F^k,\ 1 \leq \forall k \leq d\}.
\end{aligned}
$$

各多様体上に群 $G_\beta := \prod_{i \in I} GL(D_i)$ が自然に作用し，固有射 $\mu : \mathcal{F}_\beta \to E_\beta; (F^\bullet, x) \mapsto x$ は G_β 同変になる[*3]．一方で図式の左側は適当なパラメータから構成した次数付き箙多様体（$\mathfrak{M}^\bullet_\beta$ は非特異，$\mathfrak{M}^\bullet_{0,\beta}$ はアフィン）とその間の自然な固有射 $\pi : \mathfrak{M}^\bullet_\beta \to \mathfrak{M}^\bullet_{0,\beta}$ である．次数付き箙多様体は通常の箙多様体に作用する適当な 1 次元トーラスに関する固定点部分として得られる．本当は，これら次数付き箙多様体 $\mathfrak{M}^\bullet_\beta$, $\mathfrak{M}^\bullet_{0,\beta}$ を定義する際に 3.2 節で定義した写像 $\phi : \mathsf{R}^+ \hookrightarrow I \times \mathbb{Z}$ を用いる（つまり $\mathbb{C}Q$ の Auslander-Reiten 箙の情報を盛り込む）のだがここでは省略する．多様体 $\mathfrak{M}^\bullet_\beta$, $\mathfrak{M}^\bullet_{0,\beta}$ にも群 G_β の作用がしかるべく定義され，π が G_β 同変となる．

さて，我々の構成の鍵は次の事実である．

定理 4.4 (Hernandez-Leclerc [8])**.** G_β 多様体としての同型 $\mathfrak{M}^\bullet_{0,\beta} \cong E_\beta$ が存在する（以下両者を同一視する）.

これにより，ファイバー積 $\mathfrak{M}^\bullet_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta$ を構成することが可能となる．

例 4.5. Q が A_n 型の単調箙 $Q = (1 \to 2 \to \cdots \to n)$ の時に $\pi : \mathfrak{M}^\bullet_\beta \to \mathfrak{M}^\bullet_{0,\beta}$ がどうなるか説明しよう．3.2 節でやったように，高さ関数 $\xi : I \to \mathbb{Z}$ を $\xi_i := n - i$ ととって写像 $\phi : \mathsf{R}^+ \hookrightarrow I \times \mathbb{Z}$ が決めると，今の場合 $\phi(\alpha_i) = (1, n + 1 - 2i)$ となる（例 3.5(1) を参照）．これを見て $p_i := n + 1 - 2i$ とおく．$\beta = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i$ として，群の埋め込み $\rho : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{G}_d$ を

$$
\rho(t) := (t^{p_1}\mathrm{Id}_{d_1} \oplus t^{p_2}\mathrm{Id}_{d_2} \oplus \cdots \oplus t^{p_n}\mathrm{Id}_{d_n}, t) \quad \in \mathbb{G}_d = GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times
$$

と定義する．このとき，前小節で用いた A_n 型の箙多様体 $\pi : \mathfrak{M}_{n,d} \to \mathcal{N}_d$ から 1 次元トーラス $\rho(\mathbb{C}^\times)$ に関する固定部分をとったものがこの場合の次数付き箙多様体 $\pi : \mathfrak{M}^\bullet_\beta \to \mathfrak{M}^\bullet_{0,\beta}$ である．すなわち，$\mathfrak{M}^\bullet_\beta = (\mathfrak{M}_{n,d})^{\rho(\mathbb{C}^\times)}, \mathfrak{M}^\bullet_{0,\beta} = (\mathcal{N}_d)^{\rho(\mathbb{C}^\times)}$ である．ここで，$D_i := \{v \in \mathbb{C}^d \mid \rho(t)v = t^{p_i}v, \forall t \in \mathbb{C}^\times\}$ とおけば $\dim D_i = d_i$ であり，$(\mathcal{N}_d)^{\rho(\mathbb{C}^\times)} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathrm{Hom}(D_i, D_{i+1}) = E_\beta$ となることが容易に確認できる．

尚，さらに今の場合は $(\mathcal{F}_d)^{\rho(\mathbb{C}^\times)} \cong \mathcal{F}_\beta$ も成り立っている．同変 K 群の局所化定理 (cf. [3, 5.10]) を踏まえれば，これと定理 4.1 および下の定理 4.6 からアフィン Hecke 環の中心完備化が箙 Hecke 環の完備化と同型になることの幾何学的解釈が得られる．また同様に，以上の考察は定理 4.3 と下の定理 4.8 と合わせて，この場合の Dynkin 箙型 Schur-Weyl 双対性が通常の量子アフィン Schur-Weyl 双対性の完備化として得られることの幾何学的解釈を与える．

以下，同変 K 群 $K^G(X)$ をイデアル $\mathrm{Ker}\,(\dim : R(G) \to \mathbb{C}; [V] \mapsto \dim V) \subset R(G)$ が定める位相に関して完備化したものを $\widehat{K}^G(X)$ と書く．

定理 4.6 (Varagnolo-Vasserot [18])**.** $\mathcal{Z}_\beta := \mathcal{F}_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta$ とおく．このとき $\mathbb{C}$ 代数の同型 $\widehat{H}_Q(\beta) \cong \widehat{K}^{G_\beta}(\mathcal{Z}_\beta)$ が存在する．

[*3] この多様体 $\mathcal{F}_\beta$ は Lusztig によって量子群の標準基底 (canonical basis) を構成する際に導入された．

定理 4.7 (中島 [15]). $Z^\bullet_\beta := \mathfrak{M}^\bullet_\beta \times_{E_\beta} \mathfrak{M}^\bullet_\beta$ とおく．このとき，$\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\widehat{\Phi}_\beta : U_q(L\mathfrak{g}) \to \widehat{K}^{G_\beta}(Z^\bullet_\beta)$ が存在する．

定理 4.8 (F. [4], [5]). 以上の記号の下で次の事実が成立する．

(1) 同型 $\widehat{V}^{\otimes\beta} \cong \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}^\bullet_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)$ であって，次の図式を可換にするようなものが存在する：

$$\begin{tikzcd}
U_q(L\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\Phi}_\beta"] & \mathrm{End}\left(\widehat{V}^{\otimes\beta}\right) \arrow[d, "\cong"] & \widehat{H}_Q(\beta) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] \\
\widehat{K}^{G_\beta}(Z^\bullet_\beta) \arrow[r] & \mathrm{End}\left(\widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}^\bullet_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)\right) & \widehat{K}^{G_\beta}(\mathcal{Z}_\beta). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

ただし，水平方向の矢印はそれぞれの双加群構造を表す．

(2) 双加群 $\widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}^\bullet_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)$ は 2 つの $\mathbb{C}$ 代数 $\widehat{K}^{G_\beta}(Z^\bullet_\beta)$ と $\widehat{K}^{G_\beta}(\mathcal{Z}_\beta)$ の間の森田同値を導く．

(3) 準同型 $\widehat{\Phi}_\beta : U_q(L\mathfrak{g}) \to \widehat{K}^{G_\beta}(Z^\bullet_\beta)$ による引き戻しが有限次元加群圏の間に引き起こす関手 $\widehat{\Phi}^*_\beta : \widehat{K}^{G_\beta}(Z^\bullet_\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}} \to U_q(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ は充満忠実である．

関手 $\mathscr{F}_{Q,\beta}$ の充満忠実性（定理 3.2）はこの定理 4.8 の系として得られる．

謝辞

第 23 回代数学若手研究会開催にご尽力くださった世話人の皆様と参加者の皆様にこの場を借りて御礼申し上げます．ありがとうございました．

参考文献

[1] J. Brundan and A. Kleshchev. Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras. *Invent. Math.*, 178(3):451–484, 2009.

[2] V. Chari and A. Pressley. Quantum affine algebras and affine Hecke algebras. *Pacific J. Math.*, 174(2):295–326, 1996.

[3] N. Chriss and V. Ginzburg. *Representation theory and complex geometry*. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.

[4] R. Fujita. Affine highest weight categories and quantum affine Schur-Weyl duality of Dynkin quiver types. preprint. arXiv:1710.11288.

[5] R. Fujita. Geometric realization of Dynkin quiver type quantum affine Schur-Weyl duality. preprint. arXiv:1803.01538.

[6] V. Ginzburg, N. Reshetikhin, and E. Vasserot. Quantum groups and flag varieties. In *Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, MA, 1992)*, number 175 in Contemp. Math., pages 101–130. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[7] V. Ginzburg and E. Vasserot. Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n. *Internat. Math. Res. Notices.*, 3:67–85, 1993.

[8] H. Hernandez and B. Leclerc. Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 701:77–126, 2015.

[9] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras. *Invent. Math.*, 211(2):591–685, 2018.

[10] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras, II. *Duke Math. J.*, 164(8):1549–1602, 2015.

[11] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras, III. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*,111(2):420–444, 2015.

[12] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras, IV. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(4):1987–2015, 2016.

[13] D. Kazhdan and G. Lusztig. Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras. *Invent. Math.*, 87:153–215, 1987.

[14] M. Khovanov and A. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I. *Represent. Theory*, 13:309–347, 2009.

[15] H. Nakajima. Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(1):145–238, 2001.

[16] S.-j. Oh and T. Scrimshaw. Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: Exceptional cases. preprint. arXiv:1802.09253.

[17] R. Rouquier. 2-Kac-Moody algebras. preprint. arXiv:0812.5023.

[18] M. Varagnolo and E. Vasserot. Canonical bases and KLR-algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 659:67–100, 2011.

[19] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of GL(n). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* , 13 (2):165–210, 1980.