Tilting modules in affine highest weight categories

藤田 遼 (Ryo Fujita) *

京都大学理学研究科数学教室

1 導入

Cline-Parshall-Scott [5] によって 30 年ほど前に導入された**最高ウェイト圏** (highest weight category) は，Lie 理論に起源をもつ種々の代数系の半単純でない加群圏の多くに現れる特徴的なホモロジー代数的性質（BGG 相互律など）を抽象して定義される．典型例としては，有限次元複素単純 Lie 代数の最高ウェイト加群を含む Bernstein-Gelfand-Gelfand(BGG) 圏 $\mathcal{O}$ や，正標数体上の簡約代数群の有理表現圏，q-Schur 代数の加群圏，有理 Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$ 等が挙げられる．最高ウェイト圏では，ホモロジー代数的に自然な対象である単純加群とその射影被覆に加えて，その両者と相補的に関係しあう中間的対象である**標準加群**（およびその双対）が重要な役割を演ずる．例えば，BGG 圏においては Verma 加群が標準加群である．

一方で，最近よく研究されている箙 Hecke 環（KLR 代数）やカレント Lie 代数の加群圏においては，最高ウェイト圏の “アフィン版” とみなせるようなホモロジー代数的特徴が現れることがわかってきた．こうしたホモロジー代数的特徴を抽象化して Kleshchev [10] によって導入されたのが**アフィン最高ウェイト圏** (affine highest weight category) の概念である．アフィン最高ウェイト圏には標準加群に相当する加群が大小 2 種類存在し，前者の自己準同型環は多項式環になる．また，最高ウェイト圏は常に Artin 圏であったが，アフィン最高ウェイト圏は Artin 圏でなく，代わりに位相構造もしくは次数構造を入れてうまく制御する．

さて，傾加群 (tilting module) は，導来森田理論における基本的概念であり，射影生成子の一般化とみなせるような対象である．Ringel [11] は一般の最高ウェイト圏において，標準加群とその双対の両方によって同時にフィルター付けられる，という性質で特徴づけられる特別な形の傾加群（以下，Ringel 型傾加群と呼ぶ）の存在を証明した．本稿では，最高ウェイト圏における Ringel の定理をアフィン最高ウェイト圏の場合に拡張できることを示す．応用として 2 つのアフィン最高ウェイト圏の間の完全関手が圏同値を与えることの簡明な十分条件が得られる．本稿ではこれを，一般線形 Lie 代数の（変形）BGG 圏と退化アフィン Hecke 環の加群圏とを結ぶ荒川-鈴木関手 [1], [15] に対して適用し，その充満忠実性を示す．

本稿の構成は以下の通りである．まず一般的設定を理解しやすくするため，アフィン最高ウェイト圏の典型例である GL 型退化アフィン Hecke 環の表現論を 2 節で簡単にまとめる．これは 6 節の荒川-鈴木関手への準備も兼ねる．3 節でアフィン最高ウェイト圏の定義と基本的性質に触れた後，4 節でアフィン最高ウェイト圏の具体例を見る．特に，4.4 節では荒川-鈴木関手への準備を兼ねて，Soergel [14] の導入した変形 BGG 圏についてやや詳細に説明する．5 節はアフィン最高ウェイト圏における Ringel 型傾加群の存在定理と圏同値の十分条件についての紹介，6 節はその荒川-鈴木関手への応用である．

* E-mail:rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

2 退化アフィン Hecke 環の表現論

ここでは，典型例として，退化アフィン Hecke 環の表現論について簡単にまとめておく．

定義 2.1. GL_n 型の退化アフィン Hecke 環を，以下の条件から定まる $\mathbb{C}$ 代数 H_n とする：

(1) $\mathbb{C}$ 代数 H_n は，n 次対称群の群代数 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ と n 変数多項式環 $P_n := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ を部分 $\mathbb{C}$ 代数として含む；

(2) 積写像は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型 $P_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\simeq} H_n$ を引き起こす；

(3) 多項式 $f(x) \in P_n$ と隣接互換 $s_i = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$ の H_n における交換関係は，次の式で与えられる：

$$s_i \cdot f(x) = (s_i f)(x) \cdot s_i + \frac{(s_i f)(x) - f(x)}{x_i - x_{i+1}}.$$

ただし，$\sigma \in \mathfrak{S}_n, f(x) \in P_n$ に対して，$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ とする．

代数 H_n の有限次元加群圏 $\mathcal{M}_n := H_n\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ を調べるうえで，まず中心の作用に関する圏 $\mathcal{M}_n$ のスペクトル分解（=ブロック分解）を考えることが基本的である．

定理 2.2 (Bernstein, Lusztig)**.** 代数 H_n の中心 $Z(H_n)$ は対称多項式のなす部分代数 $(P_n)^{\mathfrak{S}_n}$ に一致する．

この定理 2.2 により，代数 H_n の中心指標全体のなす集合 $\operatorname{Specm} Z(H_n) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(Z(H_n), \mathbb{C})$ は，複素数の順序無し n 組全体のなす集合 $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ と同一視される．この同一視の下で，圏 $\mathcal{M}_n$ のブロック分解を

$$\mathcal{M}_n \simeq \bigoplus_{\chi \in \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n} \mathcal{M}_\chi, \qquad \mathcal{M}_\chi := \{M \in \mathcal{M}_n \mid \operatorname{Supp} M \subset \{\chi\}\},$$

と書き表す．ただし，$\operatorname{Supp} M$ は $M \in \mathcal{M}_n$ を有限次元 $Z(H_n)$ 加群と見たときの台 (support) を表す．

以下では，$\chi \in \mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n \subset \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ であるような中心指標 χ に付随するブロック $\mathcal{M}_\chi$ に焦点を絞る．その構造は A_∞ 型ルート系の言葉で記述できる．$\mathsf{Q} \equiv \mathsf{Q}(\mathsf{A}_\infty) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}\alpha_i$ を A_∞ 型ルート格子，$\mathsf{Q}_+ := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ を単純ルート $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ の生成する部分モノイドとする．各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，Q_+ の部分集合 $\{\beta = \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i \alpha_i \mid |\beta| := \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i = n\}$ を，対応 $\beta = \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i \alpha_i \mapsto (\dots, 0^{n_0}, 1^{n_1}, \dots)$ によって整数の順序無し n 組全体のなす集合 $\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ と同一視する．

各 $(i, j) \in \mathbb{Z}, i < j$ に対して，対応する正ルートを $\alpha(i, j) := \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1}$ と定め，$\mathsf{R}_+ := \{\alpha(i, j) \mid i < j\} \subset \mathsf{Q}_+$ を正ルート全体の集合とする．集合 R_+ 上の半順序 $\succeq$ を次で定める：

$$\alpha(i, j) \succeq \alpha(k, l) \quad :\Longleftrightarrow \quad (i > k) \text{ or } (i = k \,\&\, j \geq l).$$

元 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ の Kostant 分割の集合を次で定める：

$$\mathrm{KP}(\beta) := \left\{ \pi = (\gamma_1 \succeq \gamma_2 \succeq \cdots) \;\middle|\; \gamma_i \in \mathsf{R}_+, \sum_{i > 0} \gamma_i = \beta \right\}.$$

正ルート $\gamma = \alpha(i, j) \in \mathsf{R}_+$ $(|\gamma| = j - i)$ に対し，対応 $\mathfrak{S}_{|\gamma|} \ni \sigma \mapsto 1 \in \mathbb{C}, P_{|\gamma|} \ni x_k \mapsto i + k - 1 \in \mathbb{C}$ は退化アフィン Hecke 環 $H_{|\gamma|}$ の 1 次元表現 $S(\gamma)$ を定義する．Kostant 分割 $\pi = (\gamma_1 \succeq \gamma_2 \succeq \cdots) \in \mathrm{KP}(\beta)$ に対して，放物型部分代数 $H_{|\gamma_1|} \times H_{|\gamma_2|} \times \cdots \subset H_n$ からの誘導加群

$$\bar{\Delta}(\pi) := H_n \otimes_{H_{|\gamma_1|} \times H_{|\gamma_2|} \times \cdots} (S(\gamma_1) \boxtimes S(\gamma_2) \boxtimes \cdots) \tag{2.1}$$

は唯一の単純商加群 $S(\pi)$ を持つことが知られている．

定理 2.3 (Zelevinsky 1980)**.** 対応 $\pi \mapsto S(\pi)$ は β の Kostant 分割全体の集合 $\mathrm{KP}(\beta)$ と圏 $\mathcal{M}_\beta$ の単純加群の同型類全体の集合 $\mathrm{Irr}\,\mathcal{M}_\beta$ の間の全単射を導く．

さて，この定理 2.3 によって単純加群の構成と分類についてはひとまず理解されるものの，加群圏 $\mathcal{M}_\beta$ は全く半単純ではないので，そのホモロジー代数的性質を考察することが重要である．ところが，$n=1$ つまり $H_1 = \mathbb{C}[x]$ の場合が端的に示すように，有限次元加群圏 $\mathcal{M}_\beta$ には射影加群が存在しない．

そこで，十分な射影加群を得るために退化アフィン Hecke 環 H_n の中心完備化を考える．中心 $Z(H_n)$ の $\beta \in \mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ に対応する極大イデアルに関する完備化を $\widehat{Z}_\beta$ とし，退化アフィン Hecke 環の β に付随する中心完備化を $\widehat{H}_\beta := H_n \otimes_{Z(H_n)} \widehat{Z}_\beta$ と定義する．このとき，中心完備化 $\widehat{H}_\beta$ の有限生成加群圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta := \widehat{H}_\beta\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ は十分に射影加群を持つアーベル圏であり，さらにその有限次元加群のなす充満部分圏 $\widehat{H}_\beta\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ は自然に圏 $\mathcal{M}_\beta$ と同一視される．特に，$\mathrm{Irr}\,\widehat{\mathcal{M}}_\beta = \mathrm{Irr}\,\mathcal{M}_\beta$ である．

そこで，ホモロジー代数的研究をする上で，圏 $\mathcal{M}_\beta$ の代わりに，射影加群の豊富に存在するより大きな圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta$ に着目する．この加群圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta$ こそが次節で説明する**アフィン最高ウェイト圏**の構造を持つ．

3 アフィン最高ウェイト圏

前節の状況を念頭に置きつつ，ここからは以下のような位相的に完備な代数の設定で一般的に話を進める．

設定 3.1. $\mathcal{C}$ を代数的閉体 $\Bbbk$ 上の線形アーベル圏とする．さらに，以下の仮定を置く．

(a) 有限次元とは限らない左 Noether 的 $\Bbbk$ 代数 A が存在して，$\mathcal{C}$ は有限生成左 A 加群圏と（抽象的に）同値，すなわち $\mathcal{C} \simeq A\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ を満たす．

(b) A のイデアル J が存在して $\dim_\Bbbk A/J < \infty$ かつ A は J 進位相に関して完備, すなわち $A \cong \varprojlim_{\infty \leftarrow n} A/J^n$ を満たす．

仮定から，単純 A 加群は同型を除いて有限個しかないので，ある有限集合 Π で $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C} = \{S(\pi) \mid \pi \in \Pi\}$ とパラメトライズしておく．また，$S(\pi)$ を商に持つ $\mathcal{C}$ の直既約射影加群（すなわち $S(\pi)$ の射影被覆）を $P(\pi)$ とする．このとき，$\mathcal{C}$ の勝手な射影加群は $\{P(\pi) \mid \pi \in \Pi\}$ たちの有限直和に同型である．

注意 3.2. 仮定 (b) は $\dim_\Bbbk A < \infty$ のときは空になる．また，以下の話は代数 A が次数付き代数 $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ であって，$\mathtt{gdim}\, A := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\dim_\Bbbk A_n) q^n$ が well-defined な q の Laurent 級数になる場合でも全く同様に進む．実際，アフィン最高ウェイト圏を導入した Kleshchev [10] は次数付き代数の設定のみ扱っている．しかし，次数付きの設定では記法が煩雑になるので，この節では簡単のため位相的完備な代数の設定 3.1 で話を進める．

集合 Π 上に半順序 $\leq$ を入れる．

定義 3.3 (Kleshchev [10])**.** 圏 $\mathcal{C}$ が半順序集合 $(\Pi, \leq)$ に関して**アフィン最高ウェイト圏** (affine highest weight category) であるとは，各 $\pi \in \Pi$ に対して，$P(\pi) \twoheadrightarrow \Delta(\pi) \twoheadrightarrow S(\pi)$ なる直既約加群 $\Delta(\pi)$ が存在して，以下を満たすことである：

(1) $B_\pi := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\Delta(\pi))$ は $\Bbbk$ 上の（ある Krull 次元 $n_\pi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の）形式冪級数環 $\Bbbk[\![z_1, \ldots, z_{n_\pi}]\!]$ に同型．さ

らに，任意の $\sigma \in \Pi$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P(\sigma), \Delta(\pi))$ は有限階数の自由 B_π 加群である；

(2) 商加群 $\bar{\Delta}(\pi) := \Delta(\pi)/(\mathrm{rad}\, B_\pi)\Delta(\pi)$ は有限長の組成列を持つ．$\mathrm{Ker}(\bar{\Delta}(\pi) \twoheadrightarrow S(\pi))$ の各組成因子は，ある $\sigma < \pi$ に対する $S(\sigma)$ である；

(3) $\mathrm{Ker}(P(\pi) \twoheadrightarrow \Delta(\pi))$ は $\sigma > \pi$ に対する $\Delta(\sigma)$ たちによる有限長のフィルトレーションを持つ．

また，設定 3.1 における代数 A について，加群圏 $A\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ がアフィン最高ウェイト圏になるとき，代数 A を**アフィン準遺伝代数** (affine quasi-hereditary algebra) と呼ぶ[*1].

定義 3.3 に現れる直既約加群 $\Delta(\pi)$ を**標準加群**（standard module）と呼び，$\bar{\Delta}(\pi)$ を**被約標準加群**（proper standard module）と呼ぶ．一般のアフィン最高ウェイト圏においては，加群の組成列は無限長になり得る．

注意 3.4. 次数付きの設定では，定義 3.3 (1) に現れる形式的冪級数環 $\Bbbk[\![z_1, \ldots, z_{n_\pi}]\!]$ を，次数付き多項式環 $\Bbbk[z_1, \ldots, z_{n_\pi}]$ $(\deg z_i > 0)$ で置き換える．

アフィン最高ウェイト圏は次の意味で最高ウェイト圏の一般化になっている．

定義 3.5 (Cline-Parshall-Scott [5])**.** アフィン最高ウェイト圏 $\mathcal{C} \simeq A\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ について，さらに以下の互いに同値な条件が満たされるとき，$\mathcal{C}$ は**最高ウェイト圏**であるといい，そのとき代数 A を**準遺伝代数**と呼ぶ.

(1) 各 $\pi \in \Pi$ について，$B_\pi = \Bbbk$ が成り立つ；

(2) 各 $\pi \in \Pi$ について，$\Delta(\pi) = \bar{\Delta}(\pi)$ が成り立つ；

(3) $\dim_{\Bbbk} A < \infty$ である；

(4) 圏 $\mathcal{C}$ は Artin 圏，すなわち各対象は有限長の組成列を持つ．

さて，アフィン最高ウェイト圏は一般に次のような非常に良いホモロジー代数的性質を有する．

定理 3.6 (Kleshchev [10])**.** 圏 $\mathcal{C}$ は半順序集合 $(\Pi, \leq)$ に関してアフィン最高ウェイト圏であるとする．このとき以下が成り立つ：

(1) 圏 $\mathcal{C}$ の大域次元は有限である；

(2) 各 $\pi \in \Pi$ に対して，有限組成列を持つ直既約加群 $\bar{\nabla}(\pi) \in \mathcal{C}$ が存在して，次を満たす：

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(\Delta(\sigma), \bar{\nabla}(\pi)) = \begin{cases} \Bbbk & i = 0, \sigma = \pi; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 3.6 (2) に現れる直既約加群 $\bar{\nabla}(\pi)$ を**被約余標準加群**（proper costandard module）と呼ぶ．定理 3.6 (2) から直ちに次の系が従う．

系 3.7 (BGG-Brauer-Humphreys 型相互律)**.** 圏 $\mathcal{C}$ は半順序集合 $(\Pi, \leq)$ に関してアフィン最高ウェイト圏であるとする．射影加群 $P(\pi)$ の Δ-フィルトレーションにおける $\Delta(\sigma)$ の重複度を $(P(\pi) : \Delta(\sigma))$，被約余標準加群 $\bar{\nabla}(\sigma)$ の組成列における単純加群 $S(\pi)$ の重複度を $[\bar{\nabla}(\sigma) : S(\pi)]$ と表す．このとき，任意の $\pi, \sigma \in \Pi$ に対して次の等式が成り立つ：

$$(P(\pi) : \Delta(\sigma)) = [\bar{\nabla}(\sigma) : S(\pi)].$$

[*1] 本当は， アフィン準遺伝代数は加群圏の言葉を用いずに先に代数の構造として定義され，その加群圏がアフィン最高ウェイト圏になることと同値であることが後で定理（例えば [10, Theorem 6.7]）として証明される．

4　アフィン最高ウェイト圏の例

この節では，知られているアフィン最高ウェイト圏の例をいくつか紹介する．

4.1　有限型箙 Hecke 環

箙 Hecke 環はその加群圏が対称化可能 Kac-Moody 代数の量子包絡環（の上三角部分）を categorify する次数付き $\mathbb{C}$ 代数の族であり，その観点からは A 型（退化）アフィン Hecke 環の一般化とみなされる[*2]．箙 Hecke 環は Khovanov-Lauda [9] および Rouquier [12] によって導入されたため，Khovanov-Lauda-Rouquier 代数（KLR 代数）とも呼ばれる．有限型箙 Hecke 環の有限生成次数付き加群圏はアフィン最高ウェイト構造を持つことが知られている．

ここでは，ADE 型複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と，$\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の各辺に向きを与えて得られる Dynkin 型箙 $Q = (Q_0, Q_1)$ を考える．ここで Q_0 は頂点集合，Q_1 は矢の集合を表す．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の単純ルートが生成するルート格子 Q の部分モノイドを Q_+ と書く．この設定で，各元 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対して，箙 Hecke 環 $R_Q(\beta)$ が生成元と関係式で定義される．

注意 4.1. 実際には，箙 Hecke 環 $R_Q(\beta)$ は同型を除いて箙 Q の向き付けには依らない．しかし，その加群圏のアフィン最高ウェイト構造としては箙 Q の向き付けごとに異なるものが存在する．そのため，ここではあえて $R_Q(\beta)$ という記号を用いる．

各組 $(\beta, \beta') \in \mathsf{Q}_+^2$ に対して埋め込み $R_Q(\beta) \boxtimes R_Q(\beta') \hookrightarrow R_Q(\beta + \beta')$ が定義され，有限生成次数付き加群圏 $R_Q(\beta)\text{-gmod}_{\mathrm{fg}}$ を直和して得られる圏 $\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} R_Q(\beta)\text{-gmod}_{\mathrm{fg}}$ には，放物型誘導によってモノイダル圏の構造が入る．このモノイダル構造は射影加群のなす充満部分加法圏 $\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} R_Q(\beta)\text{-proj}_{\mathrm{fg}}$ および有限次元加群のなす充満部分圏 $\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} R_Q(\beta)\text{-gmod}_{\mathrm{fd}}$ をそれぞれ保つ．特に，それらの Grothendieck 群は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-代数の構造を持つ．ここで，q 作用は加群の次数シフトに対応する．

定理 4.2 (Khovanov-Lauda [9], Rouquier [12] [13], Varagnolo-Vasserot [16])**.** $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-代数としての同型

$$\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K(R_Q(\beta)\text{-proj}_{\mathrm{fg}}) \cong U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}, \qquad \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K(R_Q(\beta)\text{-gmod}_{\mathrm{fd}}) \cong U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}^*$$

が存在する．ここで $U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ は量子包絡環の上三角部分の Chevalley 元の被除冪で生成される $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 部分代数，$U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}^*$ はその（Lusztig 形式に関する）双対である．さらに，左側の同型において直既約射影加群のクラスは標準基底，右側の同型において単純加群のクラスは双対標準基底に対応する．

定理 4.2 から特に $\#\mathrm{Irr}(R_Q(\beta)\text{-gmod}_{\mathrm{fg}}) = \dim U_q(\mathfrak{g})_\beta = \#\mathrm{KP}(\beta)$ であることに注意する．

さて，$\beta = \sum_{i \in Q_0} n_i \alpha_i$ と書き，次元ベクトルが β であるような箙 Q の表現全体のなす空間

$$E_Q(\beta) := \bigoplus_{i \to j \in Q_1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n_i}, \mathbb{C}^{n_j})$$

を考える．空間 $E_Q(\beta)$ には線形群 $G_\beta := \prod_{i \in Q_0} GL_{n_i}(\mathbb{C})$ が共役によって作用し，その軌道は箙 Q の表現の同型類に対応する．良く知られた Gabriel の定理により，G_β 軌道の集合 $E_Q(\beta)/G_\beta$ と β の Kostant 分

[*2] 実際，定理 4.5 にあるように，適当な完備化を実行すれば（退化）アフィン Hecke 環は A 型箙 Hecke 環に同型である．

割の集合 KP(β) の間には，標準的な 1 : 1 対応が存在する．そこで，各 $\pi \in \mathrm{KP}(\beta)$ に対応する G_β 軌道を $\mathbb{O}_\pi \in E_Q(\beta)/G_\beta$ と表す．この対応を用いて，集合 KP(β) 上の半順序 $\leq$ を次で定める：

$$\pi \leq \pi' \quad :\Longleftrightarrow \quad \overline{\mathbb{O}}_\pi \supset \mathbb{O}_{\pi'}.$$

以上の記号の下で，次の定理が成り立つ．

定理 4.3 (加藤 [8], Brundan-Kleshchev-McNamara [3])**.** 加群圏 $R_Q(\beta)$-gmod$_{\mathrm{fg}}$ は半順序集合 $(\mathrm{KP}(\beta), \leq)$ に関する（次数付き）アフィン最高ウェイト圏の構造を有する．このとき，定理 4.2 の文脈で，圏 $R_Q(\beta)$-gmod$_{\mathrm{fg}}$ の標準加群 $\{\Delta(\pi) \mid \pi \in \mathrm{KP}(\beta)\}$ （resp. 被約標準加群 $\{\bar{\Delta}(\pi) \mid \pi \in \mathrm{KP}(\beta)\}$）は箙 Q の向き付けと整合的 (adapted) な正ルートの凸順序を用いて構成される PBW 基底（resp. 双対 PBW 基底）に対応する．

注意 4.4. ADE 型でない有限型の箙 Hecke 環の加群圏も同様にアフィン最高ウェイト圏をなす．ただし，KP(β) の半順序は組み合わせ論的に定義する．詳細は [3] を参照．

4.2 退化アフィン Hecke 環

2 節で定義した加群圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta$ のアフィン最高ウェイト構造を説明する．箙 Q として，A_∞ 型の単調箙 $Q := \left(\cdots \longrightarrow \overset{-1}{\circ} \longrightarrow \overset{0}{\circ} \longrightarrow \overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{2}{\circ} \longrightarrow \cdots\right)$ をとり，元 $\beta \in \mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n \subset \mathsf{Q}(\mathsf{A}_\infty)_+$ に付随する箙 Hecke 環 $R_Q(\beta)$ を考える．箙 Hecke 環は次数付き代数 $R_Q(\beta) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} R_Q(\beta)_k$ であり，その次数は下に有界なので，次数に関する完備化 $\widehat{R}_Q(\beta) := \prod_{k\in\mathbb{Z}} R_Q(\beta)_k$ は自然に $\mathbb{C}$ 代数の構造を持つ．

定理 4.5 (Brundan-Klechshev [2])**.** 位相的 $\mathbb{C}$ 代数の同型 $\widehat{H}_\beta \cong \widehat{R}_Q(\beta)$ が明示的に構成できる．

この定理 4.5 を定理 4.3 と合わせることによって次が示される．

系 4.6. 退化アフィン Hecke 環の中心完備化 $\widehat{H}_\beta$ は位相的完備なアフィン準遺伝代数であって，その有限生成加群圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta$ は半順序集合 $(\mathrm{KP}(\beta), \leq)$ に関してアフィン最高ウェイト圏をなす．その被約標準加群 $\{\bar{\Delta}(\pi) \mid \pi \in \mathrm{KP}(\beta)\}$ は式 (2.1) で定義される放物型誘導加群である．

注意 4.7. 上記 Brundan-Kleshchev の定理 4.5 はパラメータが 1 の冪根でないときの GL 型アフィン Hecke 環に対して対応物があり，退化アフィン Hecke 環の場合と同様の帰結が得られる．

4.3 カレント Lie 代数の可積分加群圏

有限次元複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のカレント Lie 代数 $\mathfrak{g}[z] := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z]$ を考える．カレント Lie 代数 $\mathfrak{g}[z]$ の Lie 代数構造は，$\mathfrak{g}$ の Lie 代数構造を単に多項式環 $\mathbb{C}[z]$ 上に係数拡大しただけであるが，これを $\deg(\mathfrak{g} \otimes z^k) := k$ によって $\mathbb{C}$ 上の無限次元次数付き Lie 代数とみなす．$U(\mathfrak{g}[z])$ で Lie 代数 $\mathfrak{g}[z]$ の $\mathbb{C}$ 上の普遍包絡環を表す．圏 $\mathfrak{g}[z]$-gmod$_{\mathfrak{g}\text{-int}}$ を有限生成次数付き $U(\mathfrak{g}[z])$ 加群圏の充満部分圏であって，定数項部分 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes 1 \subset \mathfrak{g}[z]$ のの作用に関して可積分であるような加群全体のなすものとする．各対象 $M \in \mathfrak{g}[z]$-gmod$_{\mathfrak{g}\text{-int}}$ は下に有界な次数付け $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_k$ を持ち，各斉次成分 M_k は $\mathfrak{g}$ の有限次元表現である．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイトの集合を P_+ とし，支配的整ウェイト $\lambda \in \mathsf{P}_+$ を最高ウェイトとする有限次元既約 $\mathfrak{g}$ 加群を $V(\lambda)$ で表す．この記号の下で，各支配的整ウェイト $\lambda \in \mathsf{P}_+$ に対し支配的半順序 $\leq$ に関して λ 以下であるような支配的整ウェイトの集合 $\mathsf{P}_+^{\leq\lambda} := \{\mu \in \mathsf{P}_+ \mid \mu \leq \lambda\}$ と，それに対応して以下の様な “

削除充満部分圏'' を考える：

$$\mathfrak{g}[z]\text{-gmod}^{\leq\lambda}_{\mathfrak{g}\text{-int}} := \{M \mid \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), M) = 0 \text{ for any } \mu \notin \mathsf{P}^{\leq\lambda}_{+}\} \quad \subset \quad \mathfrak{g}[z]\text{-gmod}_{\mathfrak{g}\text{-int}}.$$

定理 4.8 (Chari-Ion [4])**.** 圏 $\mathfrak{g}[z]\text{-gmod}^{\leq\lambda}_{\mathfrak{g}\text{-int}}$ は半順序集合 $(\mathsf{P}^{\leq\lambda}_{+}, \leq)$ に関して（次数付き）アフィン最高ウェイト圏である．その標準加群 (resp. 被約標準加群) は大域 Weyl 加群 (resp. 局所 Weyl 加群) である．

Chari-Ion [4] による定理 4.8 の証明は Macdonald 多項式の組み合わせ論を本質的に用いている．

注意 4.9. 半順序集合の部分集合で，より小さい元を取る操作に関して閉じたものを下部集合 (lower set) と呼ぶ．一般に，半順序集合 $(\Pi, \leq)$ 上のアフィン最高ウェイト圏 $\mathcal{C}$ と，下部集合 $\Sigma \subset \Pi$ に対して，Σ に対応する標準加群 $\{\Delta(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$ を含む $\mathcal{C}$ の最小の Serre 充満部分圏 $\mathcal{C}^{\Sigma}$ （=部分/商加群をとる操作および圏 $\mathcal{C}$ における拡大操作に関して閉じた充満部分圏）は半順序集合 $(\Sigma, \leq)$ に関して自然にアフィン最高ウェイト圏になることがわかる ([10, Proposition 5.16])．これを Σ による削除充満部分圏 (truncated full subcategory) と呼ぶことにする．このとき，標準加群 $\{\Delta(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$ は削除充満部分圏においてもそのまま標準加群になる．上記カレント Lie 代数の可積分加群圏はこのような構成の典型例を与える．

4.4 Soergel の変形 BGG 圏

後で荒川-鈴木関手を考察するための準備を兼ねるので，この小節では一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ の場合に限って話を展開するが，以下の話は一般の有限次元複素簡約 Lie 代数に対して同様に通用する．

行列単位からなる基底 $\{e_{ij} \in \mathfrak{g} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$ を用いて，標準的な三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{-} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ を $\mathfrak{n} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} \mathbb{C}e_{ij}, \mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{C}e_{ii}$ のように定義する．$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ を標準的な Borel 部分代数とする．ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\lambda_i := \lambda(e_{ii})$ とおき，数ベクトル $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ を対応させることにより，双対空間 $\mathfrak{h}^*$ と数ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ を以下同一視する．この約束の下で，$\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイトの集合 P_+ は $\mathsf{P}_+ = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m\}$ となる．また，Weyl ベクトルの役割を担うウェイト $\rho := (0, -1, \ldots, -m+1) \in \mathsf{P}_+$ を以下固定する．空間 $\mathfrak{h}^*$ への Weyl 群 $\mathfrak{S}_m$ の作用は，$\mathbb{C}^m$ の成分の入れ替えに対応する．

ウェイト $\lambda \in \mathbb{C}^m$ に対して，記号 $\mathbb{C}_\lambda$ で指標 $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{b}/\mathfrak{n} \cong \mathfrak{h} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}$ が定める $\mathfrak{b}$ の 1 次元表現を表す．ウェイト $\lambda \in \mathbb{C}^m$ に対して，最高ウェイト $\lambda - \rho$ [*3]の Verma 加群を $M(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}$ と表し，その唯一単純商加群を $L(\lambda)$ と書く．

ここで，Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ が局所有限に作用する $U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ の充満部分圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ を定義する：

$$\widetilde{\mathcal{O}} := \{M \mid \dim(U(\mathfrak{b})v) < \infty \text{ for any } v \in M\} \quad \subset \quad U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fg}}.$$

この充満部分圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ は $U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ の Serre 充満部分圏であることに注意する．圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ の各対象に，普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は局所有限に作用し，Harish-Chandra の定理 $\mathbb{C}^m/\mathfrak{S}_m \cong \mathrm{Specm}\, Z(\mathfrak{g})$ によって，中心の作用に関する圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ のスペクトル分解は商集合 $\mathbb{C}^m/\mathfrak{S}_m$ でパラメトライズされることがわかる．そこで，以下では簡単のため支配的整ウェイト $\lambda \in \mathsf{P}_+$ を固定し，その $\mathfrak{S}_m$ 軌道 $\mathfrak{S}_m\lambda \in \mathbb{C}^m/\mathfrak{S}_m$ に対応する直和因子 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda \subset \widetilde{\mathcal{O}}$ に焦点を絞る．このとき $\mathrm{Irr}\, \widetilde{\mathcal{O}}_\lambda = \{L(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_m\lambda\}$ が容易にわかり，圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ は単純

[*3] このようにウェイトを $-\rho$ だけずらしておくのは，Weyl 群のドット作用で記号が煩雑になるのを避けるためである．

加群 $\{L(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_m\lambda\}$ を含む $U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ の最小の Serre 充満部分圏に他ならない．この観点からは，$U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ の Serre 充満部分圏でない通常の BGG 圏 $\mathcal{O}_\lambda$ よりも，圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ の方が自然な対象に思われる．

しかし，2 節の退化アフィン Hecke 環の時と状況は同じくして，圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ は射影加群を持たない．そこで，十分な射影加群を得るために圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ の "中心完備化" を考えたい．まず以下の事実に着目する．圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ の定義より，各対象 $M \in \widetilde{\mathcal{O}}$ への可換部分代数 $\mathfrak{h}$ の作用は局所有限であるから，M は $\mathfrak{h}$ の一般同時固有空間の直和に分解する：

$$M = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{C}^m} M_\mu, \qquad M_\mu := \{v \in M \mid (e_{ii} - \mu_i \cdot \mathrm{id})^N \cdot v = 0 \ \text{ for any } 1 \leq i \leq m,\, N \gg 0\}.$$

この分解を用いて，各 $1 \leq i \leq m$ に対して加群 M の自己準同型 $z_i|_M := \bigoplus_{\mu \in \mathbb{C}^m} (e_{ii}|_{M_\mu} - \mu_i \cdot \mathrm{id}_{M_\mu})$ を定義できる．この対応によって以下のような $\mathbb{C}$ 代数の包含を得る：

$$\widehat{\mathcal{R}} := \mathbb{C}[\![z_1, \ldots, z_m]\!] \hookrightarrow \prod_{M \in \widetilde{\mathcal{O}}} \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(M); \quad z_i \mapsto \prod_{M \in \widetilde{\mathcal{O}}} z_i|_M.$$

構成から明らかに局所環 $\widehat{\mathcal{R}}$ は圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ の中心 (categorical center) に含まれるので, 圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ は $(U(\mathfrak{g}), \widehat{\mathcal{R}})$ 双加群圏の Serre 充満部分圏とみることもできる．このようにみるとき，各対象 $M \in \widetilde{\mathcal{O}}$ について $\dim(\widehat{\mathcal{R}}/\mathrm{Ann}_{\widehat{\mathcal{R}}}(M)) < \infty$ がわかり，圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ に射影加群が存在しないことは，有限次元加群圏 $\widehat{\mathcal{R}}\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ に射影加群が存在しないことの帰結とみなせる．以上を踏まえると，圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ の "中心完備化" として，変形 BGG 圏 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ を以下のように定義することは自然である．

定義 4.10. 支配的整ウェイト $\lambda \in \mathsf{P}_+$ に対応して，変形 BGG 圏（の λ ブロック）$\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ を，以下の性質を満たす有限生成 $(U(\mathfrak{g}), \widehat{\mathcal{R}})$ 双加群 M 全体のなす $(U(\mathfrak{g}), \widehat{\mathcal{R}})$ 双加群圏の充満部分圏として定義する．

(1) $(U(\mathfrak{g}), \widehat{\mathcal{R}})$ 双加群 M は $(U(\mathfrak{h}), \widehat{\mathcal{R}})$ 双加群として以下のような直和分解をもつ：

$$M \cong \bigoplus_{\mu \in \mathbb{C}^m} M_\mu, \qquad M_\mu := \{v \in M \mid (e_{ii} - \mu_i \cdot \mathrm{id}) \cdot v = v \cdot z_i \text{ for any } 1 \leq i \leq m\};$$

(2) 局所環 $\widehat{\mathcal{R}}$ の極大イデアルを $\mathfrak{r}$ と書くとき，任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$M/M\mathfrak{r}^N \in \widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$.

圏 $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$ は圏 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ において $\dim(\widehat{\mathcal{R}}/\mathrm{Ann}_{\widehat{\mathcal{R}}}(M)) < \infty$ を満たす対象 M 全体のなす充満部分圏に等しい．さらに，通常の BGG 圏 $\mathcal{O}_\lambda$ は圏 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ において $\mathrm{Ann}_{\widehat{\mathcal{R}}}(M) = \mathfrak{r}$，すなわち局所環 $\widehat{\mathcal{R}}$ が自明に作用するような対象 M 全体のなす充満部分圏に等しい．

さて，ウェイト $\mu \in \mathbb{C}^m$ に対して，対応 $\mathfrak{b} \ni e_{ij} \mapsto 0 \in \widehat{\mathcal{R}}\,(i < j)$, $\mathfrak{b} \ni e_{ii} \mapsto \mu_i + z_i \in \widehat{\mathcal{R}}$ によって階数 1 の自由 $\widehat{\mathcal{R}}$ 加群に Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ の左作用を定めることで，$(U(\mathfrak{b}), \widehat{\mathcal{R}})$ 双加群 $\widehat{\mathcal{R}}_\mu$ を定義する．この記号の下で，変形 Verma 加群 $\widehat{M}(\mu)$ を $\widehat{M}(\mu) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \widehat{\mathcal{R}}_{\mu-\rho}$ と定義する．各 $\mu \in \mathfrak{S}_m\lambda$ に対して，変形 Verma 加群 $\widehat{M}(\mu)$ は変形 BGG 圏 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ の対象であり，$\mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{O}}_\lambda}(\widehat{M}(\mu)) \cong \widehat{\mathcal{R}}$ および $\widehat{M}(\mu)/\widehat{M}(\mu)\mathfrak{r} \cong M(\mu)$ を満たす．

定理 4.11 (Soergel [14])**.** 変形 BGG 圏 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ は半順序集合 $(\mathfrak{S}_m\lambda, \leq)$ に関してアフィン最高ウェイト圏である．その標準加群（resp. 被約標準加群，被約余標準加群）は変形 Verma 加群 $\{\widehat{M}(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_m\lambda\}$ （resp. Verma 加群 $\{M(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_m\lambda\}$，双対 Verma 加群 $\{M(\mu)^\vee \mid \mu \in \mathfrak{S}_m\lambda\}$）である．

5 Ringel 型傾加群

この節では一般論に立ち戻り，アフィン最高ウェイト圏における Ringel 型傾加群の存在定理とその応用について紹介する．

最初に, 一般の傾加群について復習する．設定 3.1 に加えて, 簡単のためさらに大域次元の有限性 $\mathrm{gl.dim}\,\mathcal{C} = \mathrm{gl.dim}\,A < \infty$ を仮定する．圏 $\mathcal{C}$ がアフィン最高ウェイト圏（代数 A がアフィン準遺伝代数）のときは定理 3.6 (1) よりこの仮定は満たされている．

定義 5.1. 対象 $T \in \mathcal{C}$ が（宮下-Happel の意味で）傾加群であるとは，以下の 2 条件を満たすことと定義する:

(1) $\mathrm{Ext}^{>0}_{\mathcal{C}}(T, T) = 0$;

(2) 任意の射影加群 P に対し有限長の完全列 $0 \to P \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_m \to 0$ で，$T_i \in \mathrm{add}\,T$ を満たすものがとれる．ただし，$\mathrm{add}\,T$ は T の直和因子たちの有限直和たちからなる $\mathcal{C}$ の充満部分圏とする．

以下の定理が示すように，傾加群は導来圏において射影生成子（例えば $\bigoplus_{\pi\in\Pi} P(\pi)$）と同様の性質を持っている．その意味で傾加群は射影生成子の一般化と思うことができる．

定理 5.2 (Happel [7])**.** $T \in \mathcal{C}$ を傾加群とする．このとき:

(1) 自然な圏の包含 $\mathrm{add}\,T \hookrightarrow \mathcal{C}$ は三角圏の同値 $K^b(\mathrm{add}\,T) \simeq D^b(\mathcal{C})$ を導く；

(2) $B := \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T)^{\mathrm{op}}$ とおく．関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -) : \mathcal{C} \to B\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ は導来圏の同値 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -) : D^b(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} D^b(B\text{-mod}_{\mathrm{fg}})$ を導く．

さて，圏 $\mathcal{C}$ を半順序集合 $(\Pi, \leq)$ に関するアフィン最高ウェイト圏とする．$\mathrm{Filt}(\Delta)$ (resp. $\mathrm{Filt}(\bar{\nabla})$) で，加群族 $\{\Delta(\pi) \mid \pi \in \Pi\}$ (resp. $\{\bar{\nabla}(\pi) \mid \pi \in \Pi\}$) によるフィルトレーションを持つ対象全体のなす $\mathcal{C}$ の充満部分圏を表す．アフィン最高ウェイト圏の定義 3.3 (3) により各射影加群は $\mathrm{Filt}(\Delta)$ に属することに注意する．

充満部分圏 $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ を $\mathcal{T} := \mathrm{Filt}(\Delta) \cap \mathrm{Filt}(\bar{\nabla})$ と定義する．このとき，定理 3.6 (2) から，$T \in \mathcal{T}$ ならば $\mathrm{Ext}^{>0}_{\mathcal{C}}(T, T) = 0$ が従う．これは傾加群の定義 5.1 の条件 (1) に他ならない．

定理 5.3 (F. [6])**.** アフィン最高ウェイト圏 $\mathcal{C}$ の “中心が十分大きい”，すなわち代数 A がその中心上の加群として有限生成であると仮定する．このとき：

(1) 各 $\pi \in \Pi$ に対して，直既約加群 $T(\pi) \in \mathcal{T}$ で，標準加群 $\Delta(\pi)$ を部分加群に持ち，かつ $T(\pi)/\Delta(\pi) \in \mathrm{Filt}(\Delta)$ を満たすものが同型を除いて一意に存在する；

(2) 充満部分圏 $\mathcal{T}$ に属す任意の直既約加群はある $\pi \in \Pi$ に対する $T(\pi)$ に同型である；

(3) 各 $M \in \mathrm{Filt}(\Delta)$ は有限長の右 $\mathcal{T}$ 分解 $0 \to P \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_m \to 0$ $(T_i \in \mathcal{T})$ を持つ．

したがって，$T := \bigoplus_{\pi\in\Pi} T(\pi)$ とおくと，$\mathrm{add}\,T = \mathcal{T}$ が成立し，T は圏 $\mathcal{C}$ の傾加群である．

この定理は最高ウェイト圏における Ringel の結果 [11] のアフィン版である．

注意 5.4. 箙 Hecke 環,（退化）アフィン Hecke 環，変形 BGG 圏は上記定理 5.3 の意味で，“中心が十分大きい” ことがわかっている．

定理 5.2 (1) および定理 5.3 によって，自然な三角圏の同値 $K^b(\mathcal{T}) \simeq D^b(\mathcal{C})$ を得る．すなわち充満部分圏

$\mathcal{T} = \mathrm{Filt}(\Delta) \cap \mathrm{Filt}(\bar{\nabla}) \subset \mathcal{C}$ はアフィン最高ウェイト圏 $\mathcal{C}$ のホモロジー代数的な情報をすべて持っていると考えられる．この事実の応用として，次の系（圏同値の十分条件）が導ける．

系 5.5 ([6]). $i = 1, 2$ に対して圏 $\mathcal{C}_i$ は半順序集合 $(\Pi_i, \leq_i)$ に関してアフィン最高ウェイト圏であり，ともに中心が十分大きいとする．完全関手 $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ を考える．もし，順序を保つ全単射 $f : \Pi_1 \xrightarrow{\sim} \Pi_2$ が存在して，各 $\pi \in \Pi_1$ について同型

$$F(\Delta(\pi)) \cong \Delta(f(\pi)), \qquad F(\bar{\nabla}(\pi)) \cong \bar{\nabla}(f(\pi)),$$

が成り立てば，F は圏同値 $F : \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_2$ である．

次節で，この系 5.5 を変形 BGG 圏上の荒川-鈴木関手に適用する．

6 荒川-鈴木関手

以下，$\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ とし，2 節および 4.4 節の記号を用いる．

古典的な Schur-Weyl 双対性の構成では，$\mathfrak{g}$ のベクトル表現 $\mathbb{C}^m$ の n 階テンソル積 $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$ に，テンソル成分の置換によって n 次対称群が作用し，$(U(\mathfrak{g}), \mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ 双加群をなしていた：

$$U(\mathfrak{g}) \quad \curvearrowright \quad (\mathbb{C}^m)^{\otimes n} \quad \curvearrowleft \quad \mathbb{C}\mathfrak{S}_n.$$

ここで，勝手な $U(\mathfrak{g})$ 加群 M をさらに付け加えたテンソル積空間 $M \otimes (\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$ に，n 変数多項式環 $P_n = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の作用を，次の対応によって定義する：

$$P_n \ni \quad x_i \quad \mapsto \quad \left(\Omega|_{(M \otimes (\mathbb{C}^m)^{\otimes i-1}) \otimes \mathbb{C}^m}\right) \otimes \mathrm{id}_{(\mathbb{C}^m)^{\otimes n-i}} \quad \in \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(M \otimes (\mathbb{C}^m)^{\otimes n})$$

ここで，$\Omega := \sum_{1 \leq i.j \leq m} e_{ij} \otimes e_{ji} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ は Casimir 作用素である．この多項式環 P_n の作用と対称群 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ の $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$ 部分のテンソル成分の置換による作用は，退化アフィン Hecke 環の定義関係式を満たす．すなわち，テンソル積空間 $M \otimes (\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$ は $(U(\mathfrak{g}), H_n)$ 双加群をなす：

$$U(\mathfrak{g}) \quad \curvearrowright \quad M \otimes (\mathbb{C}^m)^{\otimes n} \quad \curvearrowleft \quad H_n.$$

双加群からの Hom 空間をとることによって関手 $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M \otimes (\mathbb{C}^m)^{\otimes n}, -) : U(\mathfrak{g})\text{-mod} \to H_n\text{-mod}$ を得る．以上の一般的な構成は荒川-鈴木 [1], [15] による．

さて，ここからは M として特別な加群をとり，適当な加群圏上で関手の性質を考察していく．

支配的整ウェイト $\lambda, \nu \in \mathsf{P}_+$ を条件 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m > \nu_1 > \cdots > \nu_m$ かつ $\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \nu_i) = n$ を満たすようにとる[*4]．このとき $\beta := \sum_{i=1}^m \alpha(\nu_i, \lambda_i) \in \mathbb{Z}^n / \mathfrak{S}_n \subset \mathsf{Q}(\mathsf{A}_\infty)_+$ とおき，写像 $\pi_\nu : \mathfrak{S}_m \lambda \to \mathrm{KP}(\beta)$ を次で定義する：

$$\pi_\nu(\mu) := (\alpha(\nu_1, \mu_1) \succeq \alpha(\nu_2, \mu_2) \succeq \cdots \succeq \alpha(\nu_m, \mu_m)).$$

上で $\lambda, \nu \in \mathsf{P}_+$ に課した条件はこの写像 π_ν が well-defined になるような条件に他ならない．写像 π_ν は単射だが全射でない．

以上の記号の下で，まず加群 M として Verma 加群 $M(\nu)$ をとり，BGG 圏 $\mathcal{O}_\lambda$ 上で荒川-鈴木関手

$$F_\nu := \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M(\nu) \otimes (\mathbb{C}^m)^{\otimes n}, -) : \mathcal{O}_\lambda \to \mathcal{M}_n = H_n\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$$

[*4] そのためには，特に $m < n$ でなくてはならないことに注意．また，この条件が満たされないときは後述の定理 6.1 が成り立たず，特に関手 F_ν は忠実でなくなる．

を考える．支配的整ウェイトに対応する Verma 加群 $M(\nu)$ は BGG 圏 $\mathcal{O}$ において射影的であり，したがってその有限次元表現とのテンソル積 $M(\nu)\otimes(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$ も BGG 圏 $\mathcal{O}$ において射影的であるから，関手 F_ν は完全である．次の定理は荒川-鈴木 [1] の主定理（の一部）である．

定理 6.1 (荒川-鈴木 [1])**.** 各ウェイト $\mu \in \mathfrak{S}_m\lambda$ に対して，以下の同型がある：

$$F_\nu(M(\mu)) \cong \bar{\Delta}(\pi_\nu(\mu)), \qquad F_\nu(L(\mu)) \cong S(\pi_\nu(\mu)).$$

特に，関手 F_ν はブロック $\mathcal{M}_\beta \subset \mathcal{M}_n$ に値をとる，忠実な関手である．

さて，次にこの関手 F_ν を変形 BGG 圏 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ 上の関手に持ち上げる．それには，双加群の構成に用いた $U(\mathfrak{g})$ 加群 M として Verma 加群 $M(\nu)$ の代わりに変形 Verma 加群 $\widehat{M}(\nu)$ をとって荒川-鈴木関手

$$\widehat{F}_\nu := \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_\lambda}(\widehat{M}(\nu)\otimes(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}, -) : \widehat{\mathcal{O}}_\lambda \to H_n\text{-mod}$$

を定義すればよい．実際，4.4 節での議論から，通常の BGG 圏 $\mathcal{O}_\lambda$ は変形 BGG 圏 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ において局所環 $\widehat{\mathcal{R}}$ が自明に作用する充満部分圏であり，$\widehat{M}(\nu)/\widehat{M}(\nu)\mathfrak{r} \cong M(\nu)$ であったから，任意の $M \in \mathcal{O}_\lambda$ に対して $\widehat{F}_\nu(M) = F_\nu(M)$ が従う．関手 F_ν の時と同じ理由によって，関手 $\widehat{F}_\nu$ も完全である．

命題 6.2 (F. [6])**.** 各ウェイト $\mu \in \mathfrak{S}_m\lambda$ に対して，以下の同型がある：

$$\widehat{F}_\nu(\widehat{M}(\mu)) \cong \Delta(\pi_\nu(\mu)), \qquad \widehat{F}_\nu(M(\mu)^\vee) \cong \bar{\nabla}(\pi_\nu(\mu)).$$

特に，関手 $\widehat{F}_\nu$ は変形 BGG 圏 $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ から圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta$ への完全関手 $\widehat{F}_\nu : \widehat{\mathcal{O}}_\lambda \to \widehat{\mathcal{M}}_\beta$ を誘導する．

パラメータ集合の間の単射 $\pi_\nu : \mathfrak{S}_m\lambda \to \mathrm{KP}(\beta)$ は順序を保ち，その像はちょうど m 個の正ルートからなる Kostant 分割全体のなす $\mathrm{KP}(\beta)$ の下部集合 $\mathrm{KP}(\beta)^m$ に一致することが示される．注意 4.9 で言及したように，下部集合 $\mathrm{KP}(\beta)^m$ に対応する圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta$ の削除充満部分圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta^m$ は半順序集合 $(\mathrm{KP}(\beta)^m, \le)$ に関して自然にアフィン最高ウェイト圏になる．また，$\mathcal{M}_\beta^m := \mathcal{M}_\beta \cap \widehat{\mathcal{M}}_\beta^m$ と定義する．

以上の考察に，系 5.5 を適用して，次の帰結を得る．

定理 6.3 (荒川-鈴木 [1], F. [6])**.** 荒川-鈴木関手 $\widehat{F}_\nu$ はアフィン最高ウェイト圏の同値

$$\widehat{F}_\nu : \widehat{\mathcal{O}}_\lambda \xrightarrow{\simeq} \widehat{\mathcal{M}}_\beta^m$$

を導く．さらに，次の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_\lambda \arrow[d, hook] \arrow[dr, "F_\nu\ \text{充満忠実}"] & & \\
\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda \arrow[r, "\simeq", "\widehat{F}_\nu"'] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}_\beta^m \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}_\beta \arrow[d, hook] \\
\widehat{\mathcal{O}}_\lambda \arrow[r, "\simeq", "\widehat{F}_\nu"'] & \widehat{\mathcal{M}}_\beta^m \arrow[r, hook] & \widehat{\mathcal{M}}_\beta
\end{tikzcd}$$

ただし，何も書かれていない矢印 $\hookrightarrow$ は自然な圏の包含を表し，$\simeq$ は圏同値であることを表す．

注意 6.4. Cline-Parshall-Scott [5] および Kleshchev [10] による基本的な定理（例えば，[10, Theorem 6.7]）により削除充満部分圏 $\widehat{\mathcal{M}}_\beta^m$ はアフィン準遺伝代数 $\widehat{H}_\beta$ のある商代数 $\widehat{H}_\beta^m$ の有限生成加群圏と同一視できる，すなわち，$\widehat{\mathcal{M}}_\beta^m = \widehat{H}_\beta^m\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ である．したがって，上記定理 6.3 は変形 BGG 圏のブロック $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$ が退化アフィン Hecke 環の中心完備化 $\widehat{H}_\beta$ の適当な商代数上の加群圏と同一視できることを主張する．

謝辞

本研究発表の機会をいただいたことに関して，研究集会の世話人である池田先生，内藤先生，佐垣先生に心より御礼申し上げます.

参考文献

[1] T. Arakawa and T. Suzuki. Duality between $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ and the degenerate affine Hecke algebra. *Journal of Algebra*, 209:288–304, 1998.

[2] J. Brundan and A. Kleshchev. Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras. *Invent. Math.*, 178(3):451–484, 2009.

[3] J. Brundan, A. Kleshchev, and P. McNamara. Homological properties of finite type Khovanov-Lauda-Rouquier algebras. *Duke Math. J.*, 163(7):1353–1404, 2014.

[4] V. Chari and B. Ion. BGG reciprocity for current algebras. *Compos. Math.*, 7(151):1265–1287, 2015.

[5] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine. Angew. Math.*, 58:85–99, 1988.

[6] R. Fujita. Tilting modules of affine quasi-hereditary algebras. preprint. arXiv:1610.02621.

[7] D. Happel. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Comment. Math. Helv.*, 62(3):339–389, 1987.

[8] S. Kato. Poincare-Birkhoff-Witt bases and Khovanov-Lauda-Rouquier algebras. *Duke Math. J.*, 163(3):619–663, 2014.

[9] M. Khovanov and A. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I. *Represent. Theory*, 13:309–347, 2009.

[10] A. Kleshchev. Affine highest weight categories and affine quasi-hereditary algebras. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(4):841–882, 2015.

[11] C. M. Ringel. The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. *Math. Z.*, 208(2):209–223, 1991.

[12] R. Rouquier. 2-Kac-Moody algebras. preprint. arXiv:0812.5023.

[13] R. Rouquier. Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras. *Algebra Colloq.*, 19:359–410, 2012.

[14] W. Soergel. Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe. *J. Amer. Math. Soc.*, 3:421–445, 1990.

[15] T. Suzuki. Rogawski's conjecture on the Jantzen filtration for the degenerate affine Hecke algebra of type A. *Represent. theory (Electronic Jour. of AMS)*, 2:393–409, 1998.

[16] M. Varagnolo and E. Vasserot. Canonical bases and KLR-algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 659:67–100, 2011.