Equivariant K-ring of GL_n affine Grassmannian and a quantum unipotent cell of LSL_2

藤田 遼 (Ryo Fujita)*

概要

Cautis-Williams [5] は一般線形群 GL_n のアフィン Grassmann 多様体 Gr_{GL_n} 上の同変偏屈連接層のなすモノイダル圏が，ループ群 LSL_2 のある冪単胞体の量子座標環の量子団代数としての圏化になっていることを示した．本稿では，これを承けてさらに既約偏屈連接層の類のなす同変 K 群の基底が量子座標環の双対標準基底に対応すること証明した，Michael Finkelberg 氏と筆者の共同研究 [6] について解説する．

1 はじめに

G を複素簡約群，$\mathcal{O} := \mathbb{C}[\![z]\!] \subset \mathcal{K} := \mathbb{C}(\!(z)\!)$ を形式的冪級数環およびその商体とする．アフィン Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_G = G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$ は幾何学的 Langlands プログラムにおいて重要な役割を演ずる無限次元多様体である．特に，Gr_G 上の $G(\mathcal{O})$ 同変偏屈（構成可能）層の圏 $\mathcal{P}^{G(\mathcal{O})}_{const}(\mathrm{Gr}_G)$ には畳み込み積 $\mathscr{F} * \mathscr{G} := \mathbf{R}m_*(\mathscr{F}\widetilde{\boxtimes}\mathscr{G})$（ここで $m\colon G(\mathcal{K}) \times^{G(\mathcal{O})} \mathrm{Gr}_G \to \mathrm{Gr}_G$ は積写像）によってモノイダル圏の構造が入り，モノイダル圏として Langlands 双対群 $G^\vee$ の表現の圏と同値 $\mathcal{P}^{G(\mathcal{O})}_{const}(\mathrm{Gr}_G) \simeq \mathrm{Rep}(G^\vee)$ であることが知られている（幾何学的佐武対応）．

構成可能層の代わりに連接層を使っても類似の構成を考えることができ，その結果として同変偏屈連接層のモノイダル・アーベル圏 $\mathcal{P}^{G(\mathcal{O})}_{coh}(\mathrm{Gr}_G)$ を得る [4]．偏屈構成可能層の圏 $\mathcal{P}^{G(\mathcal{O})}_{const}(\mathrm{Gr}_G)$ がアーベル圏として半単純かつモノイダル圏として対称であったのと対照的に，偏屈連接層の圏 $\mathcal{P}^{G(\mathcal{O})}_{coh}(\mathrm{Gr}_G)$ はアーベル圏として非半単純かつモノイダル圏として非対称である．一方で，それにも拘わらずその Grothendieck 環であるところの同変 K 環 $K^{G(\mathcal{O})}(\mathrm{Gr}_G)$ は可換環になることが知られている（例えば $G = GL_n(\mathbb{C})$ のときこれは A_1 型箙ゲージ理論に付随する K 理論的 Coulomb 枝あるいは乗法的 zastava 空間 $^\dagger\mathring{Z}^n_{\mathfrak{sl}_2}$ の座標環を与える）．このような性質を持つモノイダル・アーベル圏としては，ほかにアフィン量子群や GL 型アフィン Hecke 環（より一般に箙 Hecke 環）の有限次元加群圏が思い起こされる．そして，こうしたモノイダル・アーベル圏からはしばしば団代数のモノイダル圏化 (monoidal categorification) が得られる．

Cautis-Williams [5] は $G = GL_n(\mathbb{C})$ のときに偏屈連接層の圏 $\mathcal{P}^{G(\mathcal{O})}_{coh}(\mathrm{Gr}_G)$ がループ群 LSL_2 の冪単胞体 N^{w_n} の座標環に備わっている団代数構造のモノイダル圏化を与えることを証明した（実際にはより精密に，ループ回転 $\mathbb{C}^\times$ の同変性も加味した圏 $\mathcal{P}^{G(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}_{coh}(\mathrm{Gr}_G)$ が量子冪単胞体 $A_q(N^{w_n})$ の量子団代数構造のモノイダル圏化を与えることが示されている）．特にこれは全ての団単項式が既約偏屈連接層の類として実現されることを意味する．一方，量子冪単胞体 $A_q(N^{w_n})$ は箙 Hecke 環の加群圏を用いた別のモノイダル圏化を持つ（Kang-柏原-Kim-Oh [9] による）．したがって特に，全ての団単項式は $A_q(N^{w_n})$ の双対標準基底 (dual

* 日本学術振興会特別研究員 (PD)，〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学理学研究科数学教室

canonical basis) にも含まれている．以上の状況を踏まえれば，同型 $A_{q^{1/2}}(N^{w_n}) \cong K^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ の下で左辺の双対標準基底と右辺の既約偏屈連接層の類のなす基底が一致すると考えるのは自然であろう．そこで実際にそれを確かめたというのが本稿の主定理である．

2　量子団代数 $\mathcal{A}_n$

自然数 n を固定し，q を量子化のパラメータ（不定元）とする．以下で与えられる 3 つ組 $(\{X_k\}_{k=1}^{2n}, \widetilde{B}, \Lambda)$ を初期量子種 (initial quantum seed) に持つ量子団代数 (quantum cluster algebra, cf. [2]) を $\mathcal{A}_n$ と書く：

$$\widetilde{B} := \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & -2 & 1 & & & & & \\ 2 & 0 & -2 & 1 & & & \text{\Large 0} & \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & \\ & \text{\Large 0} & & -1 & 2 & 0 & -2 & \\ & & & & -1 & 2 & 0 & \\ \hline 0 & & \cdots & & 0 & -1 & 2 & \\ 0 & & \cdots & & & 0 & -1 & \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}_{2n,2n-2}(\mathbb{Z}),$$

$$\Lambda_{k\ell} = -\Lambda_{\ell k} := 2\lceil k/2\rceil(\lfloor k/2\rfloor - \lfloor \ell/2\rfloor), \quad \text{for } 1 \leq k \leq \ell \leq 2n.$$

ここで，$\widetilde{B}$ は交換行列であって，初期団変数 X_k のうち X_{2n-1}, X_{2n} は係数である．区別のために $D_0 := X_{2n-1}, D_1 := X_{2n}$ とおく．量子団代数 $\mathcal{A}_n$ は量子トーラス

$$\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]\langle X_k^{\pm 1}\ (1 \leq k \leq 2n) \mid X_k X_\ell = q^{\Lambda_{k\ell}} X_\ell X_k\rangle$$

の部分 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 代数であって，初期団 $\{X_k\}_{k=1}^{2n}$ から変異を繰り返し施して得られる全ての団変数によって生成される．量子団代数 $\mathcal{A}_n$ に係数の逆元 D_0^{-1}, D_1^{-1} を添加して得られる代数を $\mathcal{A}_n^{loc}$ と書く．

一般に，量子団代数には全ての団変数を固定し，$q^{1/2}$ と $q^{-1/2}$ を交換する標準的な反対合 (anti-involution) がある．本稿ではそれを ι と書く．量子団代数の元 x と y が q 可換かつともに ι 不変，すなわちある整数 λ が存在して $xy = q^\lambda yx$ かつ $\iota(x) = x, \iota(y) = y$ なるとき，元 $x \odot y := q^{\lambda/2}xy = y \odot x$ もまた ι 不変となる．たとえば量子団代数の任意の団 $\{x_i\}_{i\in J}$（J は添え字集合）に対して，団変数 x_i たちは互いに q 可換かつ ι 不変であるから，特に $\odot_{i\in J}\, x_i^{m_i}$ （ただし $(m_i) \in \mathbb{N}^J, \mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0}$）という形の元も ι 不変になる．本稿で団単項式 (cluster monomial) と言えば常にこのような形の，ι 不変になるように正規化されたものを指すと約束する．

3　モノイダル圏化

量子団代数 $\mathcal{A}_n$ は 2 つの異なるモノイダル圏による実現（量子団代数のモノイダル圏化）を持つ．

3.1　一般論

最初に量子団代数のモノイダル圏化の定義を一般の形で述べておこう．本稿で単にモノイダル圏 $\mathcal{C}$ といえばそれは常に $\mathbb{C}$ 線形アーベル圏の構造を併せ持ち，テンソル積関手 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が双完全であると仮定する．この仮定の下で Grothendieck 群 $K(\mathcal{C})$ は積 $[X] \cdot [Y] := [X \otimes Y]$ に関して環をなす．また，さらに圏 $\mathcal{C}$

の各対象が有限長の組成列を持つことも仮定しておく．そうすれば Grothendieck 環 $K(\mathcal{C})$ は既約対象の同型類集合 $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C}$ を基底とする自由アーベル群をなす．

さらにモノイダル圏 $\mathcal{C}$ が $\mathbb{Z}$ 次数構造を持つとする．すなわちアーベル群 $\mathbb{Z}$ の圏 $\mathcal{C}$ への $\mathbb{C}$ 線形な作用 $\langle - \rangle\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})$ であって，$(X\langle m\rangle) \otimes Y \cong (X \otimes Y)\langle m\rangle \cong X \otimes (Y\langle m\rangle)$ という自然同型が各 $m \in \mathbb{Z}$ と $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して存在する等の整合性条件を満たすものが与えられたとする．このとき Grothendieck 環 $K(\mathcal{C})$ に $q^{\pm 1/2}[X] := [X\langle \pm 1\rangle]$ によって $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 代数の構造が入る．加えて，各既約対象 $S \in \mathsf{Irr}\,\mathcal{C}$ と任意の $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ について $S \not\cong S\langle m\rangle$ であると仮定すれば Grothendieck 環 $K(\mathcal{C})$ は自由 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 加群をなし，その基底として商集合 $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C}/\mathbb{Z}$ の任意の完全代表系がとれる．

加えて，圏 $\mathcal{C}$ 上に反対合，すなわち関手 $\mathbb{I}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ であって $\mathbb{I} \circ \mathbb{I} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ かつ条件

$$\mathbb{I}(X\langle m\rangle) \cong \mathbb{I}(X)\langle -m\rangle, \quad \mathbb{I}(X \otimes Y) \cong \mathbb{I}(Y) \otimes \mathbb{I}(X)$$

がすべての $m \in \mathbb{Z}$ と $X, Y \in \mathcal{C}$ について成り立つものが与えられたとする．そして自己双対な既約同型類の集合 $\mathsf{Irr}_0\,\mathcal{C} := \{[S] \in \mathsf{Irr}\,\mathcal{C} \mid \mathbb{I}(S) \cong S\}$ が商集合 $\mathsf{Irr}\,\mathcal{C}/\mathbb{Z}$ の完全代表系を与えていると仮定する．これはつまり，各既約対象 S に対し $\mathbb{I}(S)$ が S のある偶数次シフトに同型であることを意味する．このとき関手 $\mathbb{I}$ は Grothendieck 環 $K(\mathcal{C})$ の反対合 $[\mathbb{I}]$ を引き起こし，$[\mathbb{I}]$ 不変集合 $\mathsf{Irr}_0\,\mathcal{C}$ はその $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 上の基底をなす．

定義 3.1 (cf. [8])**.** 以上の仮定をすべて満たす $\mathbb{Z}$ 次数付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ とその上の反対合 $\mathbb{I}$ の組 $(\mathcal{C}, \mathbb{I})$ が，量子団代数 $\mathcal{A}$ のモノイダル圏化であるとは，$\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 代数の同型 $\varphi\colon \mathcal{A} \to K(\mathcal{C})$ であって $\varphi \circ \iota = [\mathbb{I}] \circ \varphi$ を満たし，かつ任意の団単項式を既約同型類に送るものが存在するときを言う：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A} & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & K(\mathcal{C}) \\
\cup & & \cup \\
\{\text{ 団単項式 }\} & \hookrightarrow & \mathsf{Irr}_0\,\mathcal{C}.
\end{array}$$

注意 3.2. 一般に単射 $\varphi\colon \{\text{ 団単項式 }\} \hookrightarrow \mathsf{Irr}_0\,\mathcal{C}$ は全射でない．モノイダル圏 $\mathcal{C}$ の既約対象 S であってその自乗 $S^{\otimes 2}$ が再び既約になるものを特に実既約対象 (real simple object) と呼ぶ．団単項式の自乗は再び団単項式になるので，部分集合 $\varphi(\{\text{ 団単項式 }\}) \subset \mathsf{Irr}_0\,\mathcal{C}$ は実既約同型類からなることに注意する．一般には，モノイダル圏 $\mathcal{C}$ には実でない既約対象（これを虚既約対象 (imaginary simple object) と呼ぶ）が存在し得る．

注意 3.3. [5, 8, 9] などの文献ではモノイダル圏化の定義に反対合 $\mathbb{I}$ の存在を課していない．しかし本稿では特に量子団代数の良い基底について議論したいので，あえて反対合 $\mathbb{I}$ をモノイダル圏化の定義に組み入れた．

3.2 箙 Hecke 環による圏化

量子団代数 $\mathcal{A}_n$ はループ群 LSL_2 のある冪単部分群 $N(w_n)$ の量子座標環に同型であり，$A_1^{(1)}$ 型箙 Hecke 環の適切な加群圏によってモノイダル圏化される．以下このことをもう少し正確に述べよう．本節の内容は対称型 Kac-Moody 代数とその Weyl 群の元に対して成立する一般論を我々の場合に特殊化したものである．

$U_q(\mathfrak{n})_{\mathbb{Z}}$ を $A_1^{(1)}$ 型量子包絡環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の上三角部分の整形式（Chevalley 生成元の被除冪で $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 上生成される）とする．その制限双対 $A_q(N) = U_q(\mathfrak{n})_{\mathbb{Z}}^{\vee}$ は上三角部分に対応する (pro-) 冪単群 $N = \exp(\mathfrak{n}) \subset LSL_2$ の座標環 $\mathbb{C}[N]$ の量子化を与える．ウェイトによる自然な次数付け $A_q(N) = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} A_q(N)_\beta$ があることに注意する．ここで α_0, α_1 を $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の単純ルートとして，$\mathsf{Q}_+ = \mathbb{N}\alpha_0 + \mathbb{N}\alpha_1$ とおいた．

単純ルート α_0, α_1 に対応する単純鏡映をそれぞれ s_0, s_1 として，$A_1^{(1)}$ 型 Weyl 群の長さ $2n$ の元 $w_n = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{2n}} := (s_0 s_1)^n$ を考える．各 $1 \leq k \leq 2n$ に対して $\beta_k := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = k\alpha_0 + (k-1)\alpha_1$ とおくと集合 $\{\beta_k\}_{k=1}^{2n}$ は w_n によって負ルートに写るような正ルート全体の集合である．Lusztig による $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 上の組紐群作用を用いて双対ルートベクトル $E(\beta_k) \in A_q(N)_{\beta_k}$ が定まる．これらによって生成される部分 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 代数 $A_q(N(w_n)) := \langle E(\beta_1), \ldots, E(\beta_{2n}) \rangle \subset A_q(N)$ は有限次元冪単部分群 $N(w_n) = N \cap w_n N_- w_n^{-1} \subset N$（ただし $N_- \subset LSL_2$ は下三角冪単群）の量子座標環と思うことができる．木村 [10] によって，$\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 代数 $A_q(N(w_n))$ は $A_q(N)$ の双対標準基底から誘導される $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 基底 $\mathbf{B}(w_n)$ を持つことが分かっている．一方，箙 Hecke 環の理論によって，量子冪単部分群 $A_q(N(w_n))$ は $\mathbb{C}$ 上定義された $A_1^{(1)}$ 型箙 Hecke 環の次数付き有限次元加群のなす適切なモノイダル圏 $\mathcal{C}_{w_n}$ の Grothendieck 環 $K(\mathcal{C}_{w_n})$ と同型になる．このとき圏 $\mathcal{C}_{w_n}$ の既約同型類は q 冪を除いて基底 $\mathbf{B}(w_n)$ の元に対応することも知られている．

さて，形式的に q の平方根 $q^{1/2}$ を付加して $A_{q^{1/2}}(N(w_n)) := A_q(N(w_n)) \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ とおく．Geiß-Leclerc-Schröer [7] は，$\mathbb{Q}(q^{1/2})$ 代数の同型

$$\mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]} \mathbb{Q}(q^{1/2}) \cong A_{q^{1/2}}(N(w_n)) \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]} \mathbb{Q}(q^{1/2}) \tag{1}$$

を構成し，したがって量子冪単部分群が量子団代数の構造を持つことを示した．Kang-柏原-Kim-Oh [9] は圏 $\mathcal{C}_{w_n}$ が量子団代数のモノイダル圏化を与えることを示し，この同型 (1) を精密化した：

定理 3.4 (Kang-柏原-Kim-Oh [9]). 次数付きモノイダル圏 $\mathcal{C}_{w_n}$ とその上の適切な反対合 $\mathbb{I}$ は，定義 3.1 の意味で量子団代数 $\mathcal{A}_n$ のモノイダル圏化を与える．特に，次の可換図式がある：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}_n & \xleftrightarrow{\ \sim\ } & K(\mathcal{C}_{w_n}) & \xleftrightarrow{\ \sim\ } & A_{q^{1/2}}(N(w_n)) \\
\bigcup & & \bigcup & & \bigcup \\
\{\text{ 団単項式 }\} & \hookrightarrow & \mathsf{Irr}_0\, \mathcal{C}_{w_n} & \xleftrightarrow{\ \sim\ } & \mathbf{B}(w_n).
\end{array}$$

注意 3.5. 箙 Hecke 環上の加群 M のベクトル空間としての双対 $M^{\circledast}$ に箙 Hecke 環の作用を適切に定めることで対合的反変関手 $\circledast\colon \mathcal{C}_{w_n} \to \mathcal{C}_{w_n}^{\mathrm{op}}$ が定義される．これは量子群 $U_q(\mathfrak{n})^\vee$ の双対 bar-involuion に対応する．一方，量子群の双対 bar-involution と量子団代数の反対合 ι は一致せず，ウェイト毎に q 冪でずれる．定理 3.4 の反対合 $\mathbb{I}$ は関手 $\circledast$ からこのずれを修正して得られる．またこのとき同じ理由により，定理 3.4 における双対標準基底 $\mathbf{B}(w_n)$ は厳密には ι 不変になるように正規化されたものを考える必要がある．

以下，定理 3.4 の同型を介して量子団代数 $\mathcal{A}_n$ と量子冪単部分群 $A_{q^{1/2}}(N(w_n))$ をしばしば同一視する．このとき係数 $D_0, D_1 \in \mathcal{A}_n$ を可逆にする量子冪単部分群 $A_{q^{1/2}}(N(w_n))$ の局所化は w_n に付随する冪単胞体 (unipotent cell) $N^{w_n} := N \cap B_- w_n B_-$ の量子座標環 $A_{q^{1/2}}(N^{w_n})$ と同型であることが知られている [11]．またこのとき，双対標準基底の局所化

$$\mathbf{B}(w_n)^{loc} := \{ b \odot D_0^{-\ell_0} \odot D_1^{-\ell_1} \mid b \in \mathbf{B}(w_n),\ \ell_0, \ell_1 \in \mathbb{N} \}$$

が量子冪単胞体 $A_{q^{1/2}}(N^{w_n}) = \mathcal{A}_n^{loc}$ の $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 基底を与えることも知られている．

3.3 アフィン Grassmann 多様体 Gr_{GL_n} 上の偏屈連接層による圏化

最初のように $\mathcal{O} := \mathbb{C}[\![z]\!] \subset \mathcal{K} := \mathbb{C}(\!(z)\!)$ とおく．GL_n のアフィン Grassmann 多様体は

$$\mathrm{Gr}_{GL_n} := GL_n(\mathcal{K})/GL_n(\mathcal{O}) = (GL_n(\mathcal{K}) \rtimes \mathbb{C}^\times)/(GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times)$$

と定義される．ここで $\mathbb{C}^\times$ はループ回転の 4 重被覆，すなわち $c \star f(z) := f(c^4 z)$ $(c \in \mathbb{C}^\times, f(z) \in \mathcal{K})$ を表している．Gr_{GL_n} には群 $GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times$ が左からの積によって自然に作用している．このとき Gr_{GL_n} の $GL_n(\mathcal{O})$ 軌道（$= GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times$ 軌道）への分解は

$$\mathrm{Gr}_{GL_n} = \bigsqcup_{\nu \in P_+^\vee} \mathrm{Gr}^\nu, \quad \mathrm{Gr}^\nu := GL_n(\mathcal{O})[z^\nu],$$

と書くことができる．ただし，$P_+^\vee := \{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \nu_1 \geq \cdots \geq \nu_n\}$ とし，各 $\nu \in \mathbb{Z}^n$ に対して $z^\nu := \mathrm{diag}(z^{\nu_1}, \ldots, z^{\nu_n}) \in GL_n(\mathcal{K})$ とおいた．各軌道 Gr^ν は有限次元であって，その閉包（に被約スキーム構造を入れたもの）は複素射影多様体になる．これを Schubert 多様体と呼び，$\overline{\mathrm{Gr}}^\nu$ と書く．例えば，$\omega_1 := (1, 0, \ldots, 0) \in P_+^\vee$ に対しては $\overline{\mathrm{Gr}}^{\omega_1} = \mathrm{Gr}^{\omega_1} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ となる．ただし一般の $\overline{\mathrm{Gr}}^\nu$ は特異点を持つ．

各 $\nu \in P_+^\vee$ に対して，Schubert 多様体 $\overline{\mathrm{Gr}}^\nu$ 上の $GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times$ 同変準連接層の有界複体であって各コホモロジーが連接層になるようなもののなす導来圏を $D_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\overline{\mathrm{Gr}}^\nu)$ と表す．ここで，複体のコホモロジー的次数は形式的に $\frac{1}{2} \dim \mathrm{Gr}^\nu + \mathbb{Z}$ に値を取ると定義しておく．アフィン Grassmann 多様体の特殊事情として，包含関係 $\overline{\mathrm{Gr}}^\nu \subset \overline{\mathrm{Gr}}^{\nu'}$ があるとき常に $\dim \mathrm{Gr}^\nu - \dim \mathrm{Gr}^{\nu'} \in 2\mathbb{Z}$ が成り立つ．したがって帰納的極限

$$D_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n}) := \varinjlim_{\nu} D_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\overline{\mathrm{Gr}}^\nu)$$

を考えることができる．これは自然に三角圏をなす．さらに圏 $D_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ は構成可能層の場合と同様に定義される畳み込み積 $\mathscr{F} * \mathscr{G} := \mathbf{R}m_*(\mathscr{F} \tilde{\boxtimes} \mathscr{G})$ に関して閉じていて，かつ $\mathbb{C}^\times$ 作用の捻りによる $\mathbb{Z}$ 次数構造を持つ．したがって特に同変 K 群 $K^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n}) = K\Big(D_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})\Big)$ には積 $[\mathscr{F}] \cdot [\mathscr{G}] = [\mathscr{F} * \mathscr{G}]$ によって $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 代数の構造が定まる．

定義 3.6. 対象 $\mathscr{F} \in D_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ が，各 $\nu \in P_+^\vee$ に対して 2 条件

- $H^k(i_\nu^* \mathscr{F}) = 0$ for any $k > -\frac{1}{2} \dim \mathrm{Gr}^\nu$;
- $H^k(i_\nu^! \mathscr{F}) = 0$ for any $k < -\frac{1}{2} \dim \mathrm{Gr}^\nu$,

を満たすとき，$\mathscr{F}$ は（$GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times$ 同変）偏屈連接層 (perverse coherent sheaf) であるという．ただし i_ν は軌道の埋め込み $\mathrm{Gr}^\nu \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{GL_n}$ である．偏屈連接層のなす充満部分圏を $\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ と表す．

圏 $\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ は三角圏 $D_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ 上の適切な t 構造（偏屈 t 構造と呼ばれる）の核 (heart) として得られ，したがってアーベル圏をなす．さらに重要な点として，畳み込み積 $*$ は圏 $\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ 上で閉じており，そこに双完全なテンソル積を定めることが知られている [4]．特に圏 $\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ は 3.1 節にあるような条件をすべて満たす $\mathbb{Z}$ 次数付きモノイダル圏をなす．構成から同変 K 環 $K^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ はモノイダル圏の Grothendieck 環 $K\Big(\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})\Big)$ と自然に同一視される．ゆえに既約同型類集合 $\mathsf{Irr}\, \mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ は環 $K^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ の $\mathbb{Z}$ 基底を与える．

通常の偏屈（構成可能）層の場合と同様に，既約な偏屈連接層はある $GL_n(\mathcal{O})$ 軌道 Gr^ν 上の既約な同変連接層（＝既約同変ベクトル束）$\mathscr{E}$ の極小拡大 (minimal extension) $\mathcal{IC}(\nu, \mathscr{E}) := (i_\nu)_{!*} \mathscr{E}[-\frac{1}{2} \dim \mathrm{Gr}^\nu]$ として一意的に書ける [1]．すなわち，次のような $1:1$ 対応が存在する：

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Irr}\, \mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n}) & \xleftrightarrow{\ 1:1\ } & \bigsqcup_{\nu \in P_+^\vee} \mathsf{Irr}\, \mathrm{Coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}^\nu) \\
\cup & & \cup \\
\mathcal{IC}(\nu, \mathscr{E}) & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & (\nu, \mathscr{E}).
\end{array}$$

ここで $\mathrm{Coh}^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}^\nu)$ は Gr^ν 上の $GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times$ 同変連接層のなすアーベル圏を表す．

注意 3.7. 圏 $\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ は多くの虚既約対象を持つ．例えば，$\mathrm{Gr}^0=\{\mathrm{pt}\}$ に台を持つ偏屈連接層のなす部分圏は群 $GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times$ の有限次元表現の圏と同一視できるが，後者において次元が 1 より大きい既約表現はすべて虚既約対象である．同様の理由によって，一般に $\mathrm{rank}(\mathscr{E})>1$ ならば $\mathcal{IC}(\nu,\mathscr{E})$ は虚既約対象である．

定理 3.8 (Cautis-Williams [5])**.** 圏 $\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ とその上に適切に定義される反対合 $\mathbb{I}$ は，定義 3.1 の意味で（局所化された）量子団代数 $\mathcal{A}_n^{loc}=A_{q^{1/2}}(N^{w_n})$ のモノイダル圏化を与える：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}_n^{loc} & \xleftrightarrow{\ \sim\ } & K^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n}) \\
\bigcup & & \bigcup \\
\{\text{団単項式}\} & \hookrightarrow & \mathsf{Irr}_0\,\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n}).
\end{array}$$

特に，各団単項式はある軌道 Gr^ν 上の同変直線束 $\mathscr{L}$ の極小拡大 $\mathcal{IC}(\nu,\mathscr{L})$ の類に対応する．

注意 3.9. ここでの反対合 $\mathbb{I}$ は $GL_n(\mathcal{K})$ における行列の転置操作と Gr_{GL_n} における Grothendieck-Serre 双対性関手を適切に組み合わせて得られるのだが，やや複雑なので詳細を省略する．

4 主定理

定理 3.4 と定理 3.8 を組み合わせることで以下の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccc}
A_{q^{1/2}}(N^{w_n}) & \xleftrightarrow{\ \sim\ } & \mathcal{A}_n^{loc} & \xleftrightarrow{\ \sim\ } & K^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n}) \\
\bigcup & & \bigcup & & \bigcup \\
\mathbf{B}(w_n)^{loc} & \xhookleftarrow{\ \neq\ } & \{\text{団単項式}\} & \xhookrightarrow{\ \neq\ } & \mathsf{Irr}_0\,\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n}).
\end{array}$$

この図式を見ると団単項式の集合を共有する左右 2 つの基底の関係を問いたくなる．その答えが次である．

定理 4.1 (Finkelberg-F. [6])**.** 上記の同型 $A_{q^{1/2}}(N^{w_n})\cong K^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ の下で，左辺の基底 $\mathbf{B}(w_n)^{loc}$ は右辺の基底 $\mathsf{Irr}_0\,\mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ に一致する．

以下，証明の概略を述べよう．まず，量子冪単部分群 $A_{q^{1/2}}(N(w_n))$ の双対標準基底 $\mathbf{B}(w_n)$ が双対 PBW 基底を用いて特徴づけられることを思い出す．双対 PBW 基底 $\{E(a)\}_{a\in\mathbb{N}^{2n}}$ は，各 $a=(a_1,\dots,a_{2n})\in\mathbb{N}^{2n}$ に対して双対ルートベクトル $E(\beta_k)$（ι 不変になるよう正規化されている）の単項式として

$$E(a):=q^{\sum_{k<\ell}a_ka_\ell}E(\beta_1)^{a_1}E(\beta_2)^{a_2}\cdots E(\beta_{2n})^{a_{2n}}$$

と定義される元 $E(a)$ で構成される．このとき，双対標準基底 $\mathbf{B}(w_n)$ は次の 2 つの性質で特徴づけられる $A_{q^{1/2}}(N(w_n))$ の $\mathbb{Z}[q^{\pm1/2}]$ 基底 $\{B(a)\}_{a\in\mathbb{N}^{2n}}$ と一致する [10, Theorem 4.29]：

1. $\iota B(a)=B(a)$;
2. $B(a)-E(a)\in\sum_{a'\in\mathbb{N}^{2n}}q^{-1/2}\mathbb{Z}[q^{-1/2}]E(a')$.

そこで，この特徴づけを用いて各 $B(a)$ がある既約偏屈連接層の類に一致することを示したい．これは以下説明するようにアフィン Grassmann 多様体 Gr_{GL_n} と A 型冪零錘を結びつけ，Bezrukavnikov による冪零錘上の偏屈連接層の理論 [3] を引用することで達成される．

n 次元 $\mathcal{K}$ ベクトル空間 $\mathcal{K}^n$ における階数 n の自由 $\mathcal{O}$ 部分加群 $L \subset \mathcal{K}^n$ であって自然な射 $L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \to \mathcal{K}^n$ が同型になるものを $\mathcal{K}^n$ における $\mathcal{O}$-lattice と呼ぶ．GL_n のアフィン Grassmann 多様体 Gr_{GL_n} は，対応 $[g(z)] \mapsto L = g(z)L_0$（ただし $L_0 := \mathcal{O}^n \subset \mathcal{K}^n$ は標準的な $\mathcal{O}$-lattice）によって $\mathcal{K}^n$ における $\mathcal{O}$-lattice のモジュライ空間と同一視できる．この同一視の下で，各 $d \in \mathbb{N}$ に対して

$$\overline{\mathrm{Gr}}^{d\omega_1} = \{L \subset L_0 \mid \dim_{\mathbb{C}}(L_0/L) = d\}$$

と書ける．このとき各 $L \in \overline{\mathrm{Gr}}^{d\omega_1}$ に対して，z を乗ずることで定まる商空間 $L_0/L \cong \mathbb{C}^d$ 上の線形作用素 $z|_{L_0/L}$ は冪零かつ $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}\, z|_{L_0/L}) \leq n$ であることが分かる．そこで

$$\mathcal{N}_d^n := \{x \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^d) \mid x^d = 0, \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}\, x) \leq n\}$$

という，$\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ の冪零錐 $\mathcal{N}_d$ の Zariski 開集合を考えよう．一見，対応 $L \mapsto z|_{L_0/L}$ によって射 $\overline{\mathrm{Gr}}^{d\omega_1} \to \mathcal{N}_d^n$ を定義できるように思える．しかし実際には同型 $L_0/L \cong \mathbb{C}^d$ の任意性を考慮する必要があるため，これは商スタックの射

$$\psi_d \colon \left[\overline{\mathrm{Gr}}^{d\omega_1}/(GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times)\right] \to \left[\mathcal{N}_d^n/(GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times)\right]$$

として正当化される．ただし，群 $GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ の冪零錘 $\mathcal{N}_d$ への作用は $(g, c) \star x = c^{-4}\mathrm{Ad}(g)x$ で決まるものとする．このとき，射 ψ_d は偏屈連接層の圏の間の完全関手

$$\psi_d^* \colon \mathcal{P}_{coh}^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d^n) \to \mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\overline{\mathrm{Gr}}^{d\omega_1})$$

を誘導し，しかも既約同型類の $1:1$ 対応を引き起こすことが証明できる．特に，同変 K 群の $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}](= K_{\mathbb{C}^\times}(\mathrm{pt}))$ 加群としての同型 $[\psi_d^*] \colon K^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d^n) \cong K^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\overline{\mathrm{Gr}}^{d\omega_1})$ を得る．

次に，冪零錘 $\mathcal{N}_d$ 上の偏屈連接層に関する Bezrukavnikov の理論 [3] について簡単に述べる．まず，$\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ における行列の転置 $x \mapsto {}^T x$ と Grothendieck-Serre 双対性関手の合成として反変関手 $\mathbb{I}' \colon \mathcal{P}_{coh}^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d) \to \mathcal{P}_{coh}^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d)^{\mathrm{op}}$ であって $\mathbb{I}' \circ \mathbb{I}' \simeq \mathrm{Id}$ かつ $\mathbb{I}' \circ \langle m \rangle \simeq \langle -m \rangle \circ \mathbb{I}'$, $(m \in \mathbb{Z})$ を満たすものが定義できる．この時，$\mathbb{I}'$ 不変な既約偏屈連接層の類の集合 $\mathsf{Irr}_0\, \mathcal{P}_{coh}^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d)$ は同変 K 群 $K^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d)$ の $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 基底を与える．一方，$K^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d)$ の別の基底として，Andersen-Jantzen 層の類がなす基底 $\{[AJ(\lambda)]\}_{\lambda \in X_+}$ がある．ここで，ラベル集合 X_+ は $GL_d(\mathbb{C})$ の支配的ウェイトの集合である．支配的ウェイト $\lambda \in X_+$ に付随する $AJ(\lambda)$ は旗多様体の余接束 $T^*Fl(\mathbb{C}^d)$ 上の直線束 $\mathcal{O}_{T^*Fl(\mathbb{C}^d)}(\lambda)$ の Springer 特異点解消 $\pi \colon T^*Fl(\mathbb{C}^d) \to \mathcal{N}_d$ による push-forward $\mathbf{R}\pi_* \mathcal{O}_{T^*Fl(\mathbb{C}^d)}(\lambda)$ に適切に $\mathbb{C}^\times$ 作用を定めて得られる偏屈連接層である．Bezrukavnikov [3] の理論は，以下の 2 条件で特徴づけられる $K^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d)$ の基底 $\{C(\lambda)\}_{\lambda \in X_+}$ が $\mathbb{I}'$ 不変な既約偏屈連接層の類の基底 $\mathsf{Irr}_0\, \mathcal{P}_{coh}^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d)$ に一致することを主張する：

1. $[\mathbb{I}']C(\lambda) = C(\lambda)$;
2. $C(\lambda) - [AJ(\lambda)] \in \displaystyle\sum_{\lambda' \in X_+} q^{-1/2}\mathbb{Z}[q^{-1/2}][AJ(\lambda')]$.

つまり，$K^{GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_d)$ における「既約偏屈連接層の基底：Andersen-Jantzen 層の基底」という関係は，$A_{q^{1/2}}(N(w_n))$ における「双対標準基底：双対 PBW 基底」という関係の類似になっている．

以上の事実を踏まえたうえで，さらに $\psi_d^* \circ \mathbb{I}' \simeq \mathbb{I} \circ \psi_d^*$ （ただし $\mathbb{I}$ は定理 3.8 のもの）であり，しかも関手 ψ_d^* の下で双対 PBW 基底の各元 $E(a)$ が適切な $\lambda_a \in X_+$ に付随する Andersen-Jantzen 層 $AJ(\lambda_a)$ に対応することが直接確かめられる（a に対して d は十分大きくとる）．あとは基底を特徴づける性質の比較によって，欲しかった事実 $B(a) \in \mathsf{Irr}_0\, \mathcal{P}_{coh}^{GL_n(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{GL_n})$ を得る．

謝辞

研究集会 ALTReT2019 の世話人としてご尽力くださった榎本先生と直井先生にこの場を借りて御礼申し上げます．尚，本稿の内容に関わる筆者の研究は科研費 [課題番号 18J10669] および京都大学 KTGU プログラムの助成を受けたものです．

参考文献

[1] D. Arinkin and R. Bezrukavnikov, *Perverse coherent sheaves*, Mosc. Math. J. **10** (2010), no. 1, 3–29, 271.

[2] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. Math. **195** (2005), no. 2, 405–455.

[3] R. Bezrukavnikov, *Quasi-exceptional sets and equivariant coherent sheaves on the nilpotent cone*, Represent. Theory **7** (2003), 1–18.

[4] R. Bezrukavnikov, M. Finkelberg, and I. Mirković, *Equivariant homology and K-theory of affine Grassmannians and Toda lattices*, Compos. Math. **141** (2005), no. 3, 746–768.

[5] S. Cautis and H. Williams, *Culster theory of the coherent Satake category*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 3, 709–778.

[6] M. Finkelberg and R. Fujita, *Coherent IC-sheaves on type A_n affine Grassmannians and dual canonical basis of affine type A_1*, preprint. arXiv:1901.05994.

[7] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Cluster structures on quantum coordinate rings*, Selecta Math. (N.S.) **19** (2013), no. 2, 337–397.

[8] H. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 265–341.

[9] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh, *Monoidal categorification of cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), no. 2, 349–426.

[10] Y. Kimura, *Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis*, Kyoto J. Math. **52** (2012), no. 2, 277–331.

[11] Y. Kimura and H. Oya, *Twist Automorphisms on Quantum Unipotent Cells and Dual Canonical Bases*, Int. Math. Res. Not. (2019), published online.