# 量子ループ代数の表現論における凍結作用素の応用
# Application of freezing operators to the representation theory of quantum loop algebras

京都大学・数理解析研究所　藤田 遼
Ryo Fujita
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

**概要**

本稿は北京師範大学の覃帆 (Fan Qin) 氏との共同研究 [5] の概説である．団代数の理論の中で最近導入された凍結作用素 (freezing operator) の，量子ループ代数の表現論における既約 $q$ 指標の決定問題（Kazhdan–Lusztig 型予想）への応用について論じる．主結果は C 型の場合の予想の肯定的解決である．

## 1　導入

与えられた有限次元複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および量子化のパラメータ $q \in \mathbb{C}^\times$ に付随して，**量子ループ代数** $U_q(L\mathfrak{g})$ が定まる．これは $\mathfrak{g}$ に付随する非捩型アフィン Kac–Moody 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ の量子包絡環 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の部分商として定義される $\mathbb{C}$ 上の Hopf 代数であり，ループ Lie 代数 $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ の包絡代数の非余可換変形を与える．

本稿では，パラメータ $q$ は 1 の冪根でないと仮定し，$U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元表現（正確には有限次元 **1** 型表現）のなすモノイダル圏 $\mathscr{C}$ を考える．圏 $\mathscr{C}$ は非半単純な非可換モノイダル圏であり，その興味深い構造については，1990 年ごろから現在に至るまで活発に研究が行われている．ここでは，表現論的に特に基本的と思われる，圏 $\mathscr{C}$ における既約表現の $q$ 指標の決定問題を取り上げ，最近得られた結果 [5] を紹介する．

## 2　量子ループ代数の有限次元表現と $q$ 指標

本節では圏 $\mathcal{C}$ についてよく知られた基本事項を手短に述べる．

まず圏 $\mathcal{C}$ の既約対象の分類は Chari–Pressley [1] によって知られている．それによれば，古典的な最高ウェイト理論の類似として，次のような全単射が存在する：

$$\{\text{ 圏 } \mathcal{C} \text{ の既約対象の同型類 }\} \quad \xleftrightarrow{1:1} \quad \mathcal{P}^+ := \sum_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_{i,a}. \tag{2.1}$$

ここで $I$ は $\mathfrak{g}$ の単純ルートのラベル集合，$\mathcal{P}^+$ は $\{\varpi_{i,a}\}_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times}$ を自由基底とする自由アーベル群（“整 $\ell$ ウェイト” の集合，$\ell$ はループの意）

$$\mathcal{P} := \bigoplus_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} \mathbb{Z} \varpi_{i,a}$$

の部分集合である．（ここでは [1] における Drinfeld 多項式のなす集合を，集合 $\mathcal{P}^+$ と自然に同一視している．）正確な定義は省略するが，各元 $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対応する既約対象は，最高 $\ell$ ウェイト $\lambda$ の**既約最高 $\ell$ ウェイト表現** $V(\lambda)$ として実現される．

また表現の指標の圏 $\mathcal{C}$ における類似物として，Frenkel–Reshetikhin [3] の $q$ **指標**がある．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現の古典的理論では，Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ の作用に関する表現のウェイト空間分解（同時固有空間分解）を考え，ウェイト空間の次元の母関数として表現の指標が定義されたことを思い出そう．同様に圏 $\mathcal{C}$ の各対象 $V$ に対しても，ループ Cartan 部分代数 $U_q(L\mathfrak{h}) \subset U_q(L\mathfrak{g})$ の作用に関する “$\ell$ ウェイト空間分解”

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{P}} V_\mu$$

を考え，$\ell$ ウェイト空間の次元の母関数として $V$ の $q$ 指標

$$\chi_q(V) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} (\dim V_\mu) e^\mu$$

を定義することができる．これはアーベル群 $\mathcal{P}$ の群代数 $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$（$\cong$ 無限変数ローラン多項式環）の元である．$q$ 指標 $\chi_q(V)$ は表現 $V$ に関する多くの情報を含んでいる．記号 $K(\mathcal{C})$ で圏 $\mathcal{C}$ の Grothendieck 環を表すとき，対応 $V \mapsto \chi_q(V)$ は単射環準同型

$$\chi_q \colon K(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{P}]$$

を導く [3, Theorem 3].

任意に与えられた $\lambda \in \mathcal{P}^+$ について，対応する既約表現 $V(\lambda)$ の $q$ 指標 $\chi_q(V(\lambda))$ を計算せよ，というのは量子ループ代数の表現論における基本問題の一つである．複素単純 Lie 代数の古典的な表現論における Weyl 指標公式のような，既約 $q$ 指標の閉じた公式は今のところ知られていない．このような状況においてとられるアプローチの一つとして，次節で述べる Kazhdan–Lusztig 型のアプローチがある．

## 3　$(q,t)$ 指標と Kazhdan–Lusztig 型予想

複素単純 Lie 代数の無限次元既約最高ウェイト表現の指標決定問題に関する（通常の）Kazhdan–Lusztig 予想の設定では，BGG 圏 $\mathcal{O}$ の主ブロックの Grothendieck 群 $K(\mathcal{O}_0)$ が，$\mathfrak{g}$ の Weyl 群の群代数と適切に同一視され，その 1 パラメータ変形である岩堀–Hecke 代数において，標準基底 (standard basis) から帰納的アルゴリズムによって計算可能な規準基底 (canonical basis, = Kazhdan–Lusztig basis) が構成される．変形のパラメータ $t$ を 1 に特殊化したとき，この規準基底が $K(\mathcal{O}_0)$ の既約同型類のなす基底に一致する，というのが Kazhdan–Lusztig 予想の内容であった．

圏 $\mathcal{C}$ においても同様のアプローチを考えることができる．これは中島 [12], Varagnolo–Vasserot [16]（ADE 型の場合）および Hernandez [6]（一般型）による．以下，Hernandez [6] の流儀に従ってその概略を述べる．

まず岩堀–Hecke 代数の対応物として，**量子 Grothendieck 環**と呼ばれる，$K(\mathcal{C})$ の 1 パラメータ非可換変形 $K_t(\mathcal{C})$ を構成する．詳細は省くが，これはローラン多項式環 $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ を変形して得られる量子トーラス代数 $\mathcal{Y}_t = (\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}][\mathcal{P}], *)$ の部分 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ 代数として適切に定義される．ここで $\mathcal{Y}_t$ の積 $*$ は，ある歪対称双線型形式 $\gamma\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{Z}$ を用いて

$$e^{\lambda} * e^{\mu} = t^{\gamma(\lambda,\mu)/2} e^{\lambda+\mu} \qquad (\lambda, \mu \in \mathcal{P})$$

と定義される．特殊化 $t^{1/2} \mapsto 1$ は環準同型 $\mathcal{Y}_t \to \mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ を定め，その制限は写像

$$\mathrm{ev}_{t=1}\colon K_t(\mathcal{C}) \to \mathrm{Im}\,\chi_q \,(\cong K(\mathcal{C}))$$

を導く．

量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C})$ は標準基底 $\{E_t(\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{P}^+}$ を持つ．これは特殊化 $\mathrm{ev}_{t=1}$ で基本表現 $L(\varpi_{i,a})$ $(i \in I, a \in \mathbb{C}^\times)$ の $q$ 指標の単項式がなす $\mathrm{Im}\,\chi_q$ の自由基底にうつるような $K_t(\mathcal{C})$ の自由 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ 基底であって，基本表現の $q$ 指標を計算する Frenkel–Mukhin のアルゴリズム [2] の $t$ 類似を用いて構成される．

さらに，このとき各 $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対し，条件

$$\overline{\chi_{q,t}(V(\lambda))} = \chi_{q,t}(V(\lambda)) \quad \& \quad \chi_{q,t}(V(\lambda)) - E_t(\lambda) \in \sum_{\mu \in \mathcal{P}^+, \mu < \lambda} t^{-1}\mathbb{Z}[t^{-1}]E_t(\mu) \quad (3.1)$$

を満たす $K_t(\mathcal{C})$ の元 $\chi_{q,t}(V(\lambda))$ が一意的に存在する．これを既約表現 $V(\lambda)$ の $(q,t)$ **指標**と呼ぶ．ここで $\overline{(\cdot)}$ は $\overline{e^{\lambda}} = e^{\lambda}$ $(\lambda \in \mathcal{P})$, $\overline{t^{1/2}} = t^{-1/2}$ によって定まる量子トーラス代数 $\mathcal{Y}_t$ の反対合 (anti-involution) であり，部分 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ 代数 $K_t(\mathcal{C})$ を保つ．また $\leq$ は

$$\mu \leq \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda - \mu \in \sum_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_{i,a}$$

によって定まる $\mathcal{P}$ の半順序である．これは支配的順序の類似である．ここで，元 $\alpha_{i,a} \in \mathcal{P}$ $(i \in I, a \in \mathbb{C}^\times)$ は，$(c_{ij})_{i,j\in I}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列，$r^\vee := \max\{-c_{ij} \mid i,j \in I\} \in \{1,2,3\}$, $(d_i)_{i\in I} \in \{1, r^\vee\}^I$ を $d_i c_{ij} = d_j c_{ji}$ $(i,j \in I)$ なるものとして，

$$\alpha_{i,a} := \varpi_{i,aq^{d_i}} + \varpi_{i,aq^{-d_i}} - \sum_{j\in I}\sum_{k=1}^{-c_{ji}} \varpi_{j,aq^{1-c_{ji}-2k}}$$

と定義される，単純ルートの類似である．

既約 $(q,t)$ 指標全部のなす集合 $\{\chi_{q,t}(V(\lambda)\}_{\lambda\in\mathcal{P}^+}$ は，量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C})$ の自由 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ 基底を与える．これはこの文脈における規準基底の類似である．各 $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対し，集合 $\{\mu \in \mathcal{P}^+ \mid \mu \leq \lambda\}$ は有限であり，条件 (3.1) は既約 $(q,t)$ 指標を計算する帰納的アルゴリズムを与える．

そこで，Kazhdan–Lusztig 予想の類似として，等式

$$\mathrm{ev}_{t=1}\chi_{q,t}(V(\lambda)) = \chi_q(V(\lambda)) \quad (3.2)$$

が任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対して成り立つことが期待される．これは実際，$r^\vee = 1$ のとき，すなわち $\mathfrak{g}$ が ADE 型のときは，中島箙多様体上の偏屈層の理論を用いて示される．

**定理 3.1** (中島 [12])**.** $r^\vee = 1$ のとき，任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対して等式 (3.2) は成立する．

$r^\vee > 1$ の場合，すなわち $\mathfrak{g}$ が BCFG 型の場合は，同様の幾何学的手法を用いることは（少なくとも今のところ）できないが，既約 $(q,t)$ 指標は純代数的に構成されるものなので，Kazhdan–Lusztig 型予想は意味を持つ．

**予想 3.2** (Hernandez [6])**.** $r^\vee > 1$ のときも，任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対して (3.2) は成立する．

筆者の知る限り, 現時点で予想 3.2 は解決していないが, 幾つかの部分的結果は得られている．本稿では特に次の結果が重要である．以下，$h^\vee$ で $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数を表す．

**定理 3.3** (F.–Hernandez–Oh–大矢 [4]). 以下の主張が成り立つ.

(i) $\mathfrak{g}$ が B 型のとき，任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対して等式 (3.2) は成立する.

(ii) 元 $\lambda = \varpi_{i_1,a_1} + \cdots + \varpi_{i_m,a_m} \in \mathcal{P}^+$ $(i_k \in I, a_k \in \mathbb{C}^\times, 1 \le k \le m)$ が条件

$$a_k/a_l \notin \{q^s \mid s \in \mathbb{Z}, s \ge r^\vee h^\vee\} \qquad (1 \le k, l \le m) \tag{3.3}$$

を満たすとき，等式 (3.2) は成立する.（$\mathfrak{g}$ は任意でよい.）

**注意 3.4.** 定理 3.3 の証明には，Kang–柏原–Kim [9] の意味での一般化量子アフィン型 Schur–Weyl 双対性関手に関する一連の結果 [10, 8, 11, 13]，および箙 Hecke 代数による量子群の（双対）規準基底の圏化定理 [17, 15]（ゆえに偏屈層の理論は避けられない）が本質的な役割を果たす.

本稿の主定理は次である. 次節でその証明の概略を説明する.

**定理 3.5** (F.–Qin [5]). $\mathfrak{g}$ が C 型のとき，任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対して等式 (3.2) は成立する.

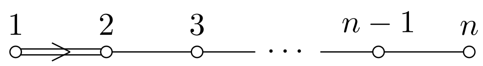
# 4 凍結作用素と主定理の証明

主定理 3.5 は，一般の状況を定理 3.3(ii) が適用できる状況にうまく帰着させることで示される. そのための道具が，**凍結作用素** (freezing operator) と呼ばれる代数的操作である. これは元々，共同研究者の Fan Qin [14] によって団代数理論の文脈で導入されたものであるが，本稿ではこれを我々の設定に翻訳して，団代数には一切触れずに説明する. 原論文 [5] における議論も [14] とは独立である.

ここからは，最初に与えられた $\mathfrak{g}$ とは別の，もうひとつの単純 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ も同時に考える. そこでこれ以降，$\mathfrak{g}$ に付随して定まる数学的対象 $X$ に対し，その $\tilde{\mathfrak{g}}$ に付随する対応物を $\tilde{X}$ と書くことにする.

以下 $\tilde{\mathfrak{g}}$ を，$\tilde{r}^\vee = r^\vee$ であって，しかも $\tilde{\mathfrak{g}}$ の Dynkin 図形が $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形を部分グラフとして含むようなものとする. より正確には，ラベル集合の間に包含 $I \subset \tilde{I}$ があって，任意の $i, j \in I$ に対して $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$, $\tilde{d}_i = d_i$ を満たすと仮定する. 特に $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ である.

**例 4.1.** 例えば $\mathfrak{g}$ が $\mathrm{C}_n$ 型のとき，$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ として，その Dynkin 図形が




となるように単純ルートをラベルする. このとき，$\tilde{\mathfrak{g}}$ として $\mathrm{C}_{\tilde{n}}$ 型 $(\tilde{n} \ge n)$ をとり，

$\tilde{I}=\{1,2,\ldots,\tilde{n}\}$ として，同様に単純ルートをラベルすると，自然な包含 $I\subset\tilde{I}$ は上の条件を満たしている．

このとき包含 $I\subset\tilde{I}$ から，$\iota\varpi_{i,a}\coloneqq\tilde{\varpi}_{i,a}\ (i\in I, a\in\mathbb{C}^{\times})$ によって，埋め込み $\iota\colon\mathcal{P}\hookrightarrow\tilde{\mathcal{P}}$ が定まる．特に，各 $\lambda\in\mathcal{P}^{+}$ に対して，$U_q(L\mathfrak{g})$ の既約表現 $V(\lambda)\in\mathcal{C}$ と $U_q(L\tilde{\mathfrak{g}})$ の既約表現 $\tilde{V}(\iota\lambda)\in\tilde{\mathcal{C}}$ が決まる．このとき $\tilde{V}(\iota\lambda)$ の $q$ 指標 $\chi_q(\tilde{V}(\iota\lambda))\in\mathbb{Z}[\tilde{\mathcal{P}}]$ から $V(\lambda)$ の $q$ 指標 $\chi_q(V(\lambda))\in\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ をうまく取り出そうというのが大まかなアイデアである．

以上の仮定のもとで，凍結作用素なる写像 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}\colon\{\chi_q(\tilde{V}(\mu))\}_{\mu\in\tilde{\mathcal{P}}^{+}}\to\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ を以下のように定める．まず，各 $\mu\in\tilde{\mathcal{P}}^{+}$ に対して，一意的に定まる定数項 1 の非負係数多項式

$$F_{\mu}(x_{i,a})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}[x_{i,a}\mid i\in\tilde{I}, a\in\mathbb{C}^{\times}]$$

によって，既約 $q$ 指標 $\chi_q(\tilde{V}(\mu))$ が

$$\chi_q(\tilde{V}(\mu))=e^{\mu}F_{\mu}(x_{i,a}\mapsto e^{-\tilde{\alpha}_{i,a}})$$

の形に表せる，という事実 [2, Theorem 4.1] を思い起こす．ここで右辺の $F_{\mu}(x_{i,a}\mapsto e^{-\tilde{\alpha}_{i,a}})$ は，多項式 $F_{\mu}(x_{i,a})$ において各変数 $x_{i,a}\ (i\in\tilde{I}, a\in\mathbb{C}^{\times})$ を $e^{-\tilde{\alpha}_{i,a}}$ に特殊化して得られる $\mathbb{Z}[\tilde{\mathcal{P}}]$ の元を表す．この記号を用いて，元 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}(\chi_q(\tilde{V}(\mu)))\in\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ を

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}(\chi_q(\tilde{V}(\mu)))=e^{\pi\mu}F_{\mu}(x_{i,a}\mapsto\delta(i\in I)e^{-\alpha_{i,a}})$$

と定義する．ただし，$\delta(i\in I)$ は $i\in I$ のとき 1，そうでないとき 0 を意味するものとし，$\pi\colon\tilde{\mathcal{P}}\to\mathcal{P}$ は $\pi\tilde{\varpi}_{i,a}\coloneqq\delta(i\in I)\varpi_{i,a}\ (i\in\tilde{I}, a\in\mathbb{C}^{\times})$ なる全射群準同型である．

既約 $(q,t)$ 指標に対しても全く同様に凍結作用素 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}\colon\{\chi_{q,t}(\tilde{V}(\mu))\}_{\mu\in\tilde{\mathcal{P}}^{+}}\to\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}][\mathcal{P}]$ が定義される.（ただしこのとき，量子トーラス $\mathcal{Y}_t$ の積 $*$ は用いず， ローラン多項式環 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}][\mathcal{P}]$ に自然に入っている可換積だけを用いる.）定義から直ちに次が従う：

$$\mathrm{ev}_{t=1}\circ\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}=\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}\circ\mathrm{ev}_{t=1}. \tag{4.1}$$

**命題 4.2** (F.-Qin [5])**.** 任意の $\mu\in\tilde{\mathcal{P}}^{+}$ に対し，以下が成立する．

(1) $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}(\chi_q(\tilde{V}(\mu)))=\chi_q(V(\pi\mu))$,
(2) $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}(\chi_{q,t}(\tilde{V}(\mu)))=\chi_{q,t}(V(\pi\mu))$.

命題 4.2 の証明は難しくない．(1) は Hernandez による [7, Lemma 5.9] を我々の記法で書き換えたものである．(2) は凍結作用素 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}$ が既約 $(q,t)$ 指標の構成に出てくる Frenkel–Mukhin 型アルゴリズムおよび Kazhdan–Lusztig 型アルゴリズムに関して整合的に振る舞うことを直接確認することで示される．

これで準備が整ったので，主定理 3.5 の証明を述べよう．いま，単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は $\mathrm{C}_n$ 型であるとし，元 $\lambda \in \mathcal{P}^+$ が任意に与えられたとする．$C_n$ 型の場合 $r^\vee h^\vee = 2(n+1)$ であることに注意しておく．$\lambda = \varpi_{i_1,a_1} + \cdots + \varpi_{i_m,a_m}$ $(i_k \in I, a_k \in \mathbb{C}^\times, 1 \leq k \leq m)$ と書いたとき，もちろん一般には定理 3.3(ii) における条件 (3.3) は満たされない．しかしここで，$\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$ を十分大きくとれば，条件

$$a_k/a_l \notin \{q^s \mid s \in \mathbb{Z}, s \geq 2(\tilde{n}+1)\} \qquad (1 \leq k, l \leq m) \tag{4.2}$$

が満たされる．（もちろん $\tilde{n}$ は $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に依存する．）そこで例 4.1 のように $\mathrm{C}_{\tilde{n}}$ 型 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ を考える．このとき (4.2) より，$\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\ell$ ウェイト $\iota\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対しては定理 3.3(ii) を適用できる．したがって

$$\mathrm{ev}_{t=1}\chi_{q,t}(\tilde{V}(\iota\lambda)) = \chi_q(\tilde{V}(\iota\lambda)) \tag{4.3}$$

が成立する．このとき，$\pi\iota\lambda = \lambda$ に注意して計算すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}_{t=1}\chi_{q,t}(V(\lambda)) &= \mathrm{ev}_{t=1}\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}(\chi_{q,t}(\tilde{V}(\iota\lambda))) && \because \text{命題 } 4.2(2) \\
&= \mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}(\mathrm{ev}_{t=1}\chi_{q,t}(\tilde{V}(\iota\lambda))) && \because (4.1) \\
&= \mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{\tilde{\mathfrak{g}}}(\chi_q(\tilde{V}(\iota\lambda))) && \because (4.3) \\
&= \chi_q(V(\lambda)) && \because \text{命題 } 4.2(1)
\end{aligned}$$

となって，示したかった等式 (3.2) を得る．これで主定理 3.5 が証明された．

**注意 4.3.** 上の証明を見ると，全く同様の議論が，より一般に $\mathfrak{g}$ が古典型（ABCD 型）の場合に通用することが分かる．これによって特に $\mathfrak{g}$ が AD 型のときの定理 3.1 と，定理 3.3(i) の別証明が得られる．

さらに，凍結作用素を用いた類似の議論は，捩型 (twisted) 量子ループ代数の既約 $q$ 指標（正確には twisted $q$ 指標）の決定問題にも応用することができる．結果として $D_{n+1}^{(2)}$ 型の既約 $q$ 指標は $D_{n+1}^{(1)}$ 型の既約 $q$ 指標と “ほぼ同じ” であることが分かる．詳細は原論文 [5, Section 4] を参照されたい．

# 謝辞

本稿は，2025 年 10 月に京都大学数理解析研究所で開催された RIMS 共同研究「合流する組み合わせ論と表現論」での筆者の講演をまとめたものです．研究代表者を務められた仲田研登先生にこの場を借りて厚く御礼申し上げます．また本稿に関係する筆者の研究は JSPS 科研費 JP23K12955 の助成を受けたものです．

# 参考文献


[1] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras and their representations. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of *CMS Conf. Proc.*, pages 59–78. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[2] Edward Frenkel and Evgeny Mukhin. Combinatorics of $q$-characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 216(1):23–57, 2001.

[3] Edward Frenkel and Nicolai Reshetikhin. The $q$-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathscr{W}$-algebras. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, volume 248 of *Contemp. Math.*, pages 163–205. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[4] Ryo Fujita, David Hernandez, Se-jin Oh, and Hironori Oya. Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and propagation of positivity. *J. Reine Angew. Math.*, 785:117–185, 2022.

[5] Ryo Fujita and Fan Qin. Freezing operators in representation theory of quantum loop algebras. Preprint, arXiv:2601.00687, 2026.

[6] David Hernandez. Algebraic approach to $q,t$-characters. *Adv. Math.*, 187(1):1–52, 2004.

[7] David Hernandez. Smallness problem for quantum affine algebras and quiver varieties. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(2):271–306, 2008.

[8] Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, and Myungho Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and $R$-matrices of quantum affine algebras, II. *Duke Math. J.*, 164(8):1549–1602, 2015.

[9] Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, and Myungho Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras. *Invent. Math.*, 211(2):591–685, 2018.

[10] Masaki Kashiwara, Myungho Kim, and Se-jin Oh. Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type A and B. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 118(1):43–77, 2019.

[11] Masaki Kashiwara and Se-jin Oh. Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: doubly laced types. *J. Algebraic Combin.*, 49(4):401–

435, 2019.

[12] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and $t$-analogs of $q$-characters of quantum affine algebras. *Ann. of Math. (2)*, 160(3):1057–1097, 2004.

[13] Se-jin Oh and Travis Scrimshaw. Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: exceptional cases. *Comm. Math. Phys.*, 368(1):295–367, 2019.

[14] Fan Qin. Analogs of dual canonical bases for cluster algebras from Lie theory. Preprint, arXiv:2407.02480, 2024.

[15] Raphaël Rouquier. Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras. In *Algebra colloquium*, volume 19, pages 359–410. World Scientific, 2012.

[16] M. Varagnolo and E. Vasserot. Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings. In *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)*, volume 210 of *Progr. Math.*, pages 345–365. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[17] M. Varagnolo and E. Vasserot. Canonical bases and KLR-algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 659:67–100, 2011.