

Dynkin 籠に付随する量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性

藤田 遼 (京都大学大学院理学研究科)*

1. はじめに

異なる代数系の表現論を結びつけるような構成は、それ自身が研究対象として大変興味深いものであるが、しばしば一方の難しい事象を他方のより易しい事象に翻訳し、例えば表現を具体的に構成する手続きをもたらすなど、応用上も有益なことが多い。

前世紀前半からよく知られている Schur-Weyl 双対性はその良い見本である。これは A_n 型複素単純 Lie 代数 \mathfrak{sl}_{n+1} の表現論と d 次対称群 \mathfrak{S}_d の表現論とを結びつける構成であり、代数系や考える表現のカテゴリーを変えることによってそのさまざまな一般化 (変種) を考えることができる。特に代数系 \mathfrak{sl}_{n+1} および \mathfrak{S}_d を、それらの由緒正しい量子アフィン化である A_n 型アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ および GL_d 型アフィン Hecke 環 $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$ にそれぞれ置き換えて得られる一般化は量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性と呼ばれる [3, 5, 10]。これは代数系 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ と $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$ の有限次元表現論を自然かつ強力に結びつけている。その具体的根拠として

- 構成から得られる有限次元表現の圏の間の関手が極めて良い性質を示す。例えば適切な充満部分圏の間の圏同値を導き、モノイダル圏構造とも整合的である [3];
- 旗多様体の同変 K 理論を用いて幾何学的に解釈できる [10],

といった事実が挙げられる。

本稿の主題は、この量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性のさらなる変種 (ある意味では一般化) であって、Dynkin 籠 Q (ADE 型 Dynkin 図形の各辺に向きを与えたデータ) に付随して得られるものである。これを以下、単に「籠 Q に付随する Schur-Weyl 双対性」と呼ぶ。これはもともと Kang-柏原-Kim [13] によって導入され、その構成に籠 Q の表現論に関するデータ (Auslander-Reiten 籠) が用いられる点が興味深い。配役としては、 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ に代わってより一般に Dynkin 籠 Q と同じ型の ADE 型複素単純 Lie 代数 \mathfrak{g}_Q に付随するアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ を考える。一方その相方として、 GL 型アフィン Hecke 環 $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$ に代わって籠 Q に付随する籠 Hecke 環 H_Q が登場する。籠 Hecke 環はその表現論が量子群 $U_v(\mathfrak{g}_Q)$ の圏化 (categorification) を与えるという意味で GL 型アフィン Hecke 環の一般化とすることができ、Khovanov-Lauda [21] と Rouquier [24] によって導入されたため KLR 代数とも呼ばれている。

本稿では、通常量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性をお手本に、籠 Q に付随する Schur-Weyl 双対性に関しても以下のような類似の事実が成り立つことを説明する：

- 構成がもたらす有限次元加群圏の間の関手 $H_Q\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$ はテンソル積と整合的であり、適切な部分圏に制限すれば圏同値である；
- 籠 Q に付随する (次数付き) 旗多様体の同変 K 理論を用いた幾何学的解釈を持つ。

本研究の一部は科研費 [課題番号 18J10669] の助成を受けたものです。

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 理学研究科 数学教室
e-mail: rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

これらは「籠 Q に付随する Schur-Weyl 双対性が代数系 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ と H_Q の有限次元表現論を自然かつ強力に結びつけている」ことを明確に示すものである。

2. 量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性

まず、通常の量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性について振り返っておく。2つの自然数 n, d を固定する。

2.1. 古典的 Schur-Weyl 双対性

古典的な場合から始める。 $V := \mathbb{C}^{n+1}$ を \mathfrak{sl}_{n+1} の自然表現とする。その d 次テンソル冪表現 $V^{\otimes d}$ はテンソル成分の置換による対称群 \mathfrak{S}_d の右作用を持つ。環上の加群の言葉では、 $U(\mathfrak{sl}_{n+1})$ を包絡環、 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ を群環として、 $V^{\otimes d}$ は $(U(\mathfrak{sl}_{n+1}), \mathbb{C}\mathfrak{S}_d)$ 双加群をなす：

$$U(\mathfrak{sl}_{n+1}) \curvearrowright V^{\otimes d} \curvearrowleft \mathbb{C}\mathfrak{S}_d.$$

双加群 $V^{\otimes d}$ は対応 $M \mapsto V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d} M$ によって有限次元左加群の圏の間の関手

$$F_{n,d}: \mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$$

を導く。これに関して以下の事実が成立する：

1. [既約表現の対応] 関手 $F_{n,d}$ は圏 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}}$ の既約対象を圏 $U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$ の既約対象または $\{0\}$ に送る；
2. [アーベル圏構造の対応] 圏 $U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$ および圏 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}}$ はともにアーベル圏として半単純である。したがって、自明に関手 $F_{n,d}$ は完全である。更に $n \geq d$ のとき、関手 $F_{n,d}$ によって圏 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}}$ は圏 $U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$ の Serre 部分圏¹に圏同値である；
3. [モノイダル圏構造の対応] 対称群の次数 d に関する直和圏 $\bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}}$ には放物型誘導 $M \odot M' := \text{Ind}_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_{d'}}^{\mathfrak{S}_{d+d'}}(M \boxtimes M')$ によってモノイダル圏の構造が入る。このとき関手の直和

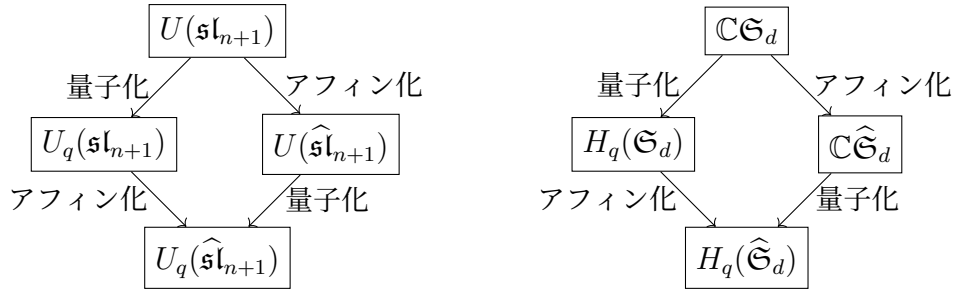
$$F_n := \bigoplus_{d \geq 0} F_{n,d}: \bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$$

はモノイダル関手である。つまり、 $F_n(M \odot M') \cong F_n(M) \otimes F_n(M')$ という自然な同型がある。

2.2. 量子化とアフィン化

下図に示す通り、Lie代数 \mathfrak{sl}_{n+1} および対称群 \mathfrak{S}_d には、それらの量子化(q 変形)とアフィン化、さらにその両者を合わせた量子アフィン化が存在する。その各々に対応して Schur-Weyl 双対性の変種を考えることも可能である。ここで、 $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1}), \widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}, U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ はそれぞれ量子群、アフィン Lie 代数、アフィン量子群であり、 $H_q(\mathfrak{S}_d), \widehat{\mathfrak{S}}_d := \mathfrak{S}_d \times \mathbb{Z}^d, H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$ はそれぞれ GL_d の岩堀-Hecke 環、アフィン Weyl 群、アフィン Hecke 環である。以下、量子化のパラメータ q は不定元とし、量子化された代数はいずれも有理関数体 $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(q)$ 上定義されていると約束する。特に q は1の冪根ではない。

¹アーベル圏の充満部分圏であって、部分・商・拡大を取る操作に関して閉じているもの。



量子化とアフィン化について表現論的な側面からもう少し詳しく述べよう．一般に複素単純Lie代数 \mathfrak{g} の量子包絡環 (量子群) $U_q(\mathfrak{g})$ は量子パラメータ q の導入によって包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を Hopf 代数として非余可換に変形したものである．表現の言葉で言えば，これはテンソル成分の置換 $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ がもはや $U_q(\mathfrak{g})$ 加群としての同型にはならないことを意味している．結果的に圏 $U_q(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$ は非対称なモノイダル圏になる．一方，複素単純Lie代数 \mathfrak{g} に付随するアフィンLie代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ はループLie代数 $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ の1次元中心拡大である．我々はその有限次元表現の圏 $U(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$ に興味がある．しかし $\widehat{\mathfrak{g}}$ の有限次元表現は常にレベル0，すなわち中心元が自明に作用することが分かる．ゆえに結局 $U(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$ と $U(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$ は自然に同一視され，特に圏 $U(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$ は半単純でない²．まとめると，標語的には「量子化はモノイダル圏構造の非対称化であり，アフィン化はアーベル圏構造の非半単純化である」と言える³．

同様に考えれば，アフィン量子群の有限次元加群圏 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$ がモノイダル圏として非対称かつアーベル圏として非半単純であることは理解しやすい．実際そのような性質のひとつの現れとして，2つの表現 $V_1, V_2 \in U_q(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$ についてテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ と $V_2 \otimes V_1$ は同型にならないことがあるが，それらの組成因子は常に重複度込みで一致し，Grothendieck 環 $K(U_q(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}})$ は可換になることが知られている [7]．

圏	モノイダル圏構造	アーベル圏構造
$U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$	対称	半単純
$U_q(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$	非対称	半単純
$U(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$	対称	非半単純
$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$	非対称	非半単純

Hecke 環サイドに関しても全く同様のことが成立する．ただし，モノイダル圏の構造は次数 d に関する有限次元加群圏の直和の上に放物型誘導 (の類似) を考えることで得られる．特に，アフィン Hecke 環の有限次元加群圏の直和 $\bigoplus_{d \geq 0} H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}}$ は非対称モノイダル圏かつ非半単純アーベル圏で，その Grothendieck 環は可換になる．このことは後で登場する箆 Hecke 環の加群圏 \mathcal{M}_Q でも同様である．

2.3. 量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性

さて，アフィン Hecke 環 $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$ は2種類の生成元 $\{X_k^{\pm 1}\}_{1 \leq k \leq d}, \{T_\ell\}_{1 \leq \ell < d}$ といくつかの関係式によって定義される \mathbb{k} 代数であった．ここで元 $X_k^{\pm 1}$ たちは互いに可換であり，Laurent 多項式環 $\mathbb{k}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_d^{\pm 1}]$ と同型な部分代数を生成する．一方，元 T_ℓ たちは組紐関係式を満たし，岩堀-Hecke 環 $H_q(\mathfrak{S}_d)$ と同型な部分代数を生成する．

²例えば， \mathfrak{g} の非自明な有限次元表現 V に対し， $L\mathfrak{g}$ の表現 $V[z^{\pm 1}] := V \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ を考える．このとき任意の複素数 $a \in \mathbb{C}^\times$ に対し有限次元商 $V[z^{\pm 1}]/(z-a)^2 V[z^{\pm 1}]$ は半単純でない．

³もちろんここでは有限次元表現に話を限定している．

Lie代数 \mathfrak{sl}_{n+1} の自然表現 $V = \mathbb{C}^{n+1}$ の量子アフィン化として、アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ はベクトル空間 $V := \mathbb{k}^{n+1} \otimes \mathbb{k}[z^{\pm 1}]$ 上に自然な作用を持つ。その d 次テンソル冪 $V^{\otimes d}$ 上にはアフィン Hecke 環 $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d)$ が右から作用する。この作用は、生成元 $X_k^{\pm 1}$ を k 番目のテンソル成分におけるスペクトル変数 $z^{\pm 1}$ の掛け算作用素に、生成元 T_ℓ を $(\ell, \ell + 1)$ 番目のテンソル成分 $V \otimes V$ 上の正規 R 行列（後述）を用いて適切に作られる作用素にそれぞれ送ることで定まる。これより $(U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}), H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d))$ 双加群を得る：

$$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \curvearrowright V^{\otimes d} \curvearrowleft H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d).$$

定理 2.1 (Chari-Pressley [3]). 対応 $M \mapsto V^{\otimes d} \otimes_{H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d)} M$ によって誘導される有限次元加群の圏の間の関手

$$\mathcal{F}_{n,d}: H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$$

に関して、以下の事実が成立する：

1. [既約表現の対応] 関手 $\mathcal{F}_{n,d}$ は圏 $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}}$ の既約対象を圏 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$ の既約対象または $\{0\}$ に送る；
2. [アーベル圏構造の対応] 関手 $\mathcal{F}_{n,d}$ は完全である。更に $n \geq d$ のとき、関手 $\mathcal{F}_{n,d}$ によって圏 $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}}$ は圏 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$ の Serre 部分圏に圏同値である；
3. [モノイダル圏構造の対応] 次数 d に関する直和として得られる関手

$$\mathcal{F}_n := \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{F}_{n,d}: \bigoplus_{d \geq 0} H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$$

はモノイダル関手である。つまり、 $\mathcal{F}_n(M \odot M') \cong \mathcal{F}_n(M) \otimes \mathcal{F}_n(M')$ 。

注意 2.2. 上で見たように圏 $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{G}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}}$ と圏 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$ はともに半単純でないので、1の既約表現の対応に関する主だけから2の圏同値に関する主張は直ちには導かれぬ。この部分が古典的 Schur-Weyl 双対性の時と比べて異なる。

3. Dynkin 籐に付随する一般化

以下 $X \in \{A, D, E\}$ とし、 $Q = (I, \Omega)$ を X_n 型 Dynkin 図形から各辺に向きを与えて得られる籐とする。ここで $I = \{1, \dots, n\}$ は Dynkin 図形の頂点集合、 Ω は籐 Q の矢の集合（向き付けのデータ）である。また \mathfrak{g}_Q を X_n 型複素単純 Lie 代数⁴、 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ をその単純ルートの集合とし、 $Q^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ とおく。さらに W を \mathfrak{g}_Q の Weyl 群、 $R^+ := W\{\alpha_i\}_{i \in I} \cap Q^+$ を正ルートの集合とする。

3.1. 籐 Hecke 環

正ルートの和 $\beta = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in Q^+$ に対して、籐 Hecke 環 $H_Q(\beta)$ が定まる [21, 24]。これは生成元と関係式で定義される体 \mathbb{k} 上の次数付き代数である。基礎体 \mathbb{k} はとりあえず何でも良いが、後で Schur-Weyl 双対性を考えるときは $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(q)$ とする。生成元は3種類 $\{e_i\}_{i \in I}, \{x_k\}_{1 \leq k \leq d}, \{\tau_\ell\}_{1 \leq \ell < d}$ からなる。ただし $d := \text{ht}(\beta) = \sum_{i \in I} d_i$ とし、

⁴ もちろん Lie 代数 \mathfrak{g}_Q は籐 Q の向き付けには依らず、Dynkin 図形だけで決まるのであるが、籐 Q と同じ Dynkin 型であることを忘れないためにここでは敢えて \mathfrak{g}_Q と書く。

$I^\beta := \{(i_1, \dots, i_d) \in I^d \mid \sum_{k=1}^d \alpha_{i_k} = \beta\}$ とおいた. 集合 $\{e_i\}_{i \in I^\beta}$ は 1 を分割する直交冪単元の集合, すなわち $\sum_{i \in I^\beta} e_i = 1$ かつ $e_i \cdot e_{i'} = \delta_{i, i'} e_i$ を満たす. また生成元 x_k, τ_ℓ はそれぞれアフィン Hecke 環 $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$ における生成元 X_k, T_ℓ の類似である (ただし τ_ℓ たちは厳密には組紐関係式を満たさない). 集合 $\{e_i\}_{i \in I^\beta} \cup \{x_k\}_{1 \leq k \leq d}$ は多項式環の直和 $P_\beta := \bigoplus_{i \in I^\beta} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_d]e_i$ に同型な $H_Q(\beta)$ の部分代数を生成する. 生成元 τ_ℓ を含む定義関係式たちはやや複雑なので本稿では省略する. 代わりに籠 Hecke 環 $H_Q(\beta)$ の多項式表現を記述しよう. これは後で Schur-Weyl 双対性の構成でも用いる.

命題 3.1 (cf. [21] Proposition 2.3). 多項式環の直和 $P_\beta = \bigoplus_{i \in I^\beta} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_d]e_i$ には変数 x_k の置換および $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in I^\beta$ の成分の並べ替えによる自然な \mathfrak{S}_d 作用があることに注意する. 階数 1 の自由 P_β 加群 P_β 上に, さらに元 τ_ℓ が P_β 上の \mathbb{k} 線形作用素

$$f \mapsto \sum_{i: i_\ell = i_{\ell+1}} \frac{(s_\ell - 1)(e_i \cdot f)}{x_\ell - x_{\ell+1}} + \sum_{i: (i_\ell \leftarrow i_{\ell+1}) \in \Omega} (x_{\ell+1} - x_\ell) s_\ell(e_i \cdot f) + \sum_{i: \text{それ以外}} s_\ell(e_i \cdot f) \quad (1)$$

にとして作用することで, 籠 Hecke 環 $H_Q(\beta)$ の忠実な右表現 $H_Q(\beta) \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(P_\beta)^{\text{op}}$ が定まる. ただし s_ℓ は隣接互換 $(\ell, \ell + 1) \in \mathfrak{S}_d$ である.

籠 Hecke 環 $H_Q(\beta)$ は $\deg e_i = 0, \deg x_k = 2, \deg(\tau_\ell e_i) = -a_{i_\ell, i_{\ell+1}}$ によって \mathbb{Z} 次数付き代数になる (ただし $(a_{ij})_{i, j \in I}$ は X_n 型 Cartan 行列). この次数付けは下に有界であることが知られている. 特に $H_Q(\beta)$ の次数に関する完備化 $\widehat{H}_Q(\beta)$ も自然に \mathbb{k} 代数となる.

さて, 籠 Hecke 環に関して重要なことはその次数付き加群の圏が量子群 $U_v(\mathfrak{g}_Q)$ の圏化するという事実であり, その点では GL 型アフィン Hecke 環の場合 (LLT-有木の理論) の精密化・一般化を与えている. より正確には, 有限次元次数付き加群圏 $H_Q(\beta)\text{-gmod}_{\text{fd}}$ を $\beta \in Q^+$ に関して直和した圏に放物型誘導の類似によってモノイダル圏の構造が入り, その Grothendieck 環が量子群の上三角部分の双対整形式 $U_v^+(\mathfrak{g}_Q)_{\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]}$ と同型になる [21, 24]. ここで $v^{\pm 1}$ は加群圏の次数シフトに対応する. さらに基礎体 \mathbb{k} の標数が 0 ならば, この同型の下で既約表現の類が $U_v^+(\mathfrak{g}_Q)_{\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]}$ の双対標準基底 (dual canonical basis) の元と 1 : 1 に対応する [26, 25]. 次数を忘却する関手 $H_Q(\beta)\text{-gmod}_{\text{fd}} \rightarrow \widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\text{fd}}$ は, Grothendieck 環のレベルでは特殊化 $v = 1$ に対応する. 双対整形式 $U_v^+(\mathfrak{g}_Q)_{\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]}$ の $v = 1$ における特殊化は可換環であり, その複素化は \mathfrak{g}_Q の上三角部分に対応する冪単群 N_Q の座標環を与える. 以上をまとめると次が分かる:

定理 3.2 (Khovanov-Lauda [21], Rouquier [24, 25], Varagnolo-Vasserot [26]). 基礎体 \mathbb{k} の標数は 0 とする. このときモノイダル圏

$$\mathcal{M}_Q := \bigoplus_{\beta \in Q^+} \widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\text{fd}}$$

の Grothendieck 環 (の複素化) $K(\mathcal{M}_Q)_{\mathbb{C}}$ は座標環 $\mathbb{C}[N_Q]$ と同型で, これは既約表現の類と (特殊化された) 双対標準基底の元との 1 : 1 対応を導く.

注意 3.3. 籠 Q が A_n 型単調籠 $(1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n)$ の場合は, 籠 Hecke 環とアフィン Hecke 環の間にもっと直接の関係がある. すなわち, 籠 Hecke 環 $\widehat{H}_Q(\beta)$ がアフィン Hecke 環 $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$ の β から適切に決まる中心指標に関する完備化と同型になる [1, 24].

3.2. Kang-柏原-Kim による双加群の構成

ここでは Kang-柏原-Kim [13] による籠 Q に付随する Schur-Weyl 双対性の構成を述べる.

まず, Dynkin 籠 Q の複素数体 \mathbb{C} 上の有限次元表現の圏 $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\text{fd}}$ の **Auslander-Reiten (AR) 籠** が重要である. AR 籠は圏 $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\text{fd}}$ の直既約加群 (の同型類) を頂点とし, 対応する直既約加群の間の既約射を矢とすることで定まる籠である. Gabriel の定理より, 圏 $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\text{fd}}$ の直既約加群はその次元ベクトルによって正ルートと $1:1$ 対応しているので, AR 籠の頂点集合は正ルートの集合 R^+ と同一視できる. 矢の情報もルート系の言葉だけで完全に統制される. AR 籠には自然に座標を入れることができ, それによって写像 $\phi_Q: R^+ \hookrightarrow I \times q^{\mathbb{Z}}$ が定まる. これは $q^{\mathbb{Z}}$ 方向の平行移動を除いて一意的である. 本稿ではこれ以上詳しいことは述べないが, 代わりに次ページに AR 籠とその座標の例を図示した. ただし図では正ルート $\sum_{i \in I} k_i \alpha_i \in R^+$ を $1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$ と略記している. 特に図 1 からは AR 籠が籠 Q の向き付けに依存する様子が窺える.

さて, $\{\varpi_i\}_{i \in I}$ を \mathfrak{g}_Q の基本ウェイトの集合とする. 各 $i \in I$ に対しアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ のレベル 0 可積分加群 \mathbb{V}_i であって, 古典ウェイト ϖ_i の巡回ベクトル $v_i \in \mathbb{V}_i$ を持ち, その古典ウェイトの集合が Weyl 群軌道 $W \cdot \varpi_i$ の凸包に含まれるような最大のものを考える. これは Chari-Pressley [4] の意味での大域 Weyl 加群であり, 柏原 [17] によるレベル 0 端ウェイト加群, 中島 [22] による籠多様体の中心ファイバーの同変 K 群として実現される標準加群とも同型である. \mathfrak{g}_Q が A_n 型で $i = 1$ のとき, \mathbb{V}_1 はアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の自然表現 $\mathbb{V} = \mathbb{k}^{n+1} \otimes \mathbb{k}[z^{\pm 1}]$ に他ならない. 一般の場合も同型 $\text{End}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)}(\mathbb{V}_i) \cong \mathbb{k}[z_i^{\pm 1}]$ があり, \mathbb{V}_i は $\mathbb{k}[z_i^{\pm 1}]$ 加群として有限階数自由である. この z_i は所謂スペクトル変数である. スペクトル変数 z_i を任意のスカラー $a \in \mathbb{k}^\times$ に特殊化して得られる \mathbb{V}_i の有限次元商 $V_i(a) := \mathbb{V}_i / (z_i - a)\mathbb{V}_i$ は既約 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 加群である. 任意の有限次元既約 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 表現は $V_i(a)$ たちの適当なテンソル積の組成因子として現れ, モノイダル圏 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$ の Grothendieck 環は類 $[V_i(a)]$ たちを変数とする無限変数多項式環と同型になる [2, 7]. その意味で族 $\{V_i(a)\}_{i \in I, a \in \mathbb{k}^\times}$ は基本的である.

正ルート $\alpha \in R^+$ に対して, AR 籠におけるその座標が $\phi_Q(\alpha) = (i, q^p)$ であったとする. このとき, 2 種類の $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 加群 $\widehat{V}(\alpha) := \mathbb{V}_i \otimes_{\mathbb{k}[z_i^{\pm 1}]} \mathbb{k}[x], V(\alpha) := V_i(q^p)$ を考える. ただし $x := q^{-p}z_i - 1$ とおいた. 加群 $\widehat{V}(\alpha)$ は変形パラメータ x による既約加群 $V(\alpha)$ の無限小変形である. そして, 単純ルートに付随する加群 $\widehat{V}(\alpha_i)$ を用いて

$$\widehat{V}^{\otimes \beta} := \bigoplus_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_d) \in I^\beta} \widehat{V}(\alpha_{i_1}) \hat{\otimes} \widehat{V}(\alpha_{i_2}) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \widehat{V}(\alpha_{i_d}) \quad (2)$$

と定義する. ここに, 次の段落で説明する正規 R 行列 (normalized R -matrix) を用いて, 籠 Hecke 環 $\widehat{H}_Q(\beta)$ の右作用を入れる.

2 頂点 $i, j \in I$ に付随する正規 R 行列 $R_{i,j}$ はテンソル積加群 $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j$ からその順序を入れ替えたテンソル積加群 $\mathbb{V}_j \otimes \mathbb{V}_i$ への $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \otimes \mathbb{k}[z_i^{\pm 1}, z_j^{\pm 1}]$ 準同型写像であって, 正規性条件 $R_{i,j}(v_i \otimes v_j) = v_j \otimes v_i$ を満たすものである. しかし, 実際にそのような $R_{i,j}$ が存在するためにはスペクトル変数の比 z_j/z_i に関する局所化を行う必要があり, 正確には $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \otimes \mathbb{k}[z_i^{\pm 1}, z_j^{\pm 1}]$ 準同型写像

$$R_{i,j}: \mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{k}(z_j/z_i) \otimes_{\mathbb{k}(z_j/z_i)} (\mathbb{V}_j \otimes \mathbb{V}_i), \quad R_{i,j}(v_i \otimes v_j) = 1 \otimes (v_j \otimes v_i)$$

としてはじめて well-defined に定まる. 正規 R 行列 $R_{i,j}$ が $z_j/z_i = a_j/a_i$ に極を持つということは, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 準同型 $V_i(a_i) \otimes V_j(a_j) \rightarrow V_j(a_j) \otimes V_i(a_i)$ であって (古典) 最高ウエ

イト空間の同型 $\mathbb{k}(v_i \otimes v_j) \cong \mathbb{k}(v_j \otimes v_i)$ を導くものが存在しないことを意味しており、特にこのとき $V_i(a_i) \otimes V_j(a_j) \not\cong V_j(a_j) \otimes V_i(a_i)$ であることが従う。このように正規 R 行列がどこに極を持つかを理解することは圏 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$ のモノイダル圏としての性質を理解する上で極めて重要である。

以上の準備のもとで圏 Hecke 環の作用を具体的に述べることができる。

定理 3.4 (Kang-柏原-Kim [13], Oh-Scrimshaw [23], F. [9]). 以下の対応は、式 (2) で定義される左 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ 上に、圏 Hecke 環 $\widehat{H}_Q(\beta)$ の右作用を定義する：

- $e_i \mapsto i$ 番目の直和成分への射影;
- $x_k \mapsto k$ 番目のテンソル成分上の変形パラメータ x を掛ける作用素;
- $\tau_\ell \mapsto$ 命題 3.1 の式 (1) に現れる s_ℓ を正規 R 行列に置き換えて得られる作用素.

これにより $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ は $(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q), \widehat{H}_Q(\beta))$ 双加群をなす：

$$U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \curvearrowright \widehat{V}^{\otimes\beta} \curvearrowleft \widehat{H}_Q(\beta).$$

注意 3.5. ここで非自明なのは τ_ℓ の作用の well-defined 性である。これを直接示すには構成に関係する正規 R 行列の極とその位数を知る必要がある。代数的方法では圏 Q の Dynkin 型に対する個別の考察により、AD 型のときは [13] で、E 型のときは計算機を援用して [23] で示された。一方、[9] による幾何学的別構成（後述の定理 4.3）を用いる証明は Dynkin 型について統一かつ計算機を使わない。

3.3. 誘導される関手の性質

双加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ は対応 $M \mapsto \widehat{V}^{\otimes\beta} \otimes_{\widehat{H}_Q(\beta)} M$ によって加群圏の間の関手 $\widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$ を誘導する。ここで、既約加群 $\{V(\alpha)\}_{\alpha \in R^+}$ を含みかつテンソル積で閉じている最小の Serre 部分圏 $\mathcal{C}_Q \subset U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$ を考えると、構成より圏 \mathcal{C}_Q は関手の像を含む。実はこの部分圏 \mathcal{C}_Q はもともと Hernandez-Leclerc [12] によって Kang-柏原-Kim [13] 以前に研究されており、座標環 $\mathbb{C}[N_Q]$ の圏化を与えることが分かっていた。

定理 3.6 (Hernandez-Leclerc [12]). モノイダル圏 \mathcal{C}_Q の Grothendieck 環 $K(\mathcal{C}_Q)_{\mathbb{C}}$ は座標環 $\mathbb{C}[N_Q]$ と同型で、これは既約表現の類と双対標準基底の元の間での $1:1$ 対応を導く。実際にはこの同型の量子化が成立する。

定理 3.2 と定理 3.6 を合わせると、環同型 $K(\mathcal{M}_Q) \cong K(\mathcal{C}_Q)$ であって既約表現の類の間での $1:1$ 対応を導くものが存在することが分かる。圏 Q に付随する Schur-Weyl 双対性はこの環同型を圏化する。すなわち：

定理 3.7 (Kang-柏原-Kim [13]). 双加群 $\widehat{V}^{\otimes\beta}$ が誘導する関手 $\widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow \mathcal{C}_Q$ から、さらに定義域の $\beta \in Q^+$ に関する直和を考えることによって得られる関手

$$\mathcal{F}_Q: \mathcal{M}_Q \rightarrow \mathcal{C}_Q$$

はモノイダル完全関手であり、Grothendieck 環のレベルで上記の環同型 $K(\mathcal{M}_Q) \cong K(\mathcal{C}_Q)$ を導く。特に、関手 \mathcal{F}_Q は圏 \mathcal{M}_Q の既約対象を圏 \mathcal{C}_Q の既約対象に送り、この対応は同型を除いて $1:1$ である。

次節で説明する幾何学的考察を用いるとさらに次が証明できる。

定理 3.8 ([8, 9]). 関手 \mathcal{F}_Q はモノイダル圏の同値 $\mathcal{M}_Q \simeq \mathcal{C}_Q$ である.

注意 3.9. 注意 2.2 で述べたことと同様であるが, 圏 $\mathcal{M}_Q, \mathcal{C}_Q$ はともに半単純でないので, 既約対象の 1:1 対応 (定理 3.7) だけから直ちに圏同値 (定理 3.8) が導けるわけではないことに念のため注意を向けておく.

注意 3.10. 箝 Q が A_n 型単調箝 $Q = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n)$ のとき, 箝 Hecke 環 $\widehat{H}_Q(\beta)$ はアフィン Hecke 環 $H_{q-2}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$ の適当な中心指標に関する完備化と同型になるのだった (注意 3.3). このとき同様の完備化によって双加群 $\mathbb{V}^{\otimes d}$ から双加群 $\widehat{\mathbb{V}}^{\otimes \beta}$ が得られる. その意味で, 箝 Q に付随する Kang-柏原-Kim の構成は通常量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性の構成の一般化と言える. また, この特別な場合における定理 3.7 および定理 3.8 は Chari-Pressley [3] の議論の直接の帰結としても得られる.

4. 幾何学的解釈

前節までの記号を引き続き用いる. 特に $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(q)$ とする. また以下で多様体と言えはそれは常に準射影的複素代数多様体を意味するものとする.

4.1. 双加群の幾何学的レシピ

G を線形代数群とし, $R(G)$ をその表現環とする. ただし本稿で具体的に扱うのは G が一般線形群 $GL_k(\mathbb{C})$ いくつかの直積になっている場合だけである. $G = GL_k(\mathbb{C})$ のときは標準的な同型 $R(GL_k(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_k^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_k}$ がある.

今, 群 G が代数的に作用する多様体とそれらの間の G 同変な固有射からなる図式

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & M_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & N & \end{array} \quad \curvearrowright \quad G$$

が与えられたとする. ここで多様体 N は特異点を持っていても良いが, 多様体 M_1 と M_2 は非特異であると仮定する. このとき, **畳み込み積** (convolution product, cf. [6]) に関して, G 同変 K 群 $K^G(M_1 \times_N M_1)$ および $K^G(M_2 \times_N M_2)$ はともに $R(G)$ 代数をなし, $K^G(M_1 \times_N M_2)$ は $(K^G(M_1 \times_N M_1), K^G(M_2 \times_N M_2))$ 双加群をなす:

$$K^G(M_1 \times_N M_1) \quad \curvearrowright \quad K^G(M_1 \times_N M_2) \quad \curvearrowright \quad K^G(M_2 \times_N M_2).$$

以下ではこのレシピを具体的な設定に適用することで, 量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性とその箝 Q に付随する一般化が幾何学的に実現できることを述べる.

4.2. 通常 Schur-Weyl 双対性の幾何学的解釈

2つの自然数 n, d を固定する. ここでは以下の図式に対してレシピを適用する:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_d^n & & \mathcal{F}_d \\ & \searrow \pi & \swarrow \mu \\ & \mathcal{N}_d & \end{array} \quad \curvearrowright \quad \mathbb{G}_d = GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$$

記号の意味をひとつずつ説明しよう. $\mathcal{N}_d := \{x \in \text{End}(\mathbb{C}^d) \mid x^d = 0\}$ は $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ の冪零錐,

$$\mathcal{B}_d := \{F^\bullet = (\mathbb{C}^d = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \cdots \supseteq F^d = 0) \mid F^i \text{ は部分ベクトル空間}\}$$

は $GL_d(\mathbb{C})$ の旗多様体, $\mu: \mathcal{F}_d := T^*\mathcal{B}_d \rightarrow \mathcal{N}_d$ は Springer 特異点解消である. 余接束 $\mathcal{F}_d = T^*\mathcal{B}_d$ は標準的に

$$\mathcal{F}_d = \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_d \times \mathcal{N}_d \mid x(F^{k-1}) \subset F^k, 1 \leq \forall k \leq d\}.$$

と同一視できて, この同一視の下で μ は単に射影 $(F^\bullet, x) \mapsto x$ である.

左側の固有射 $\pi: \mathfrak{M}_d^n \rightarrow \mathcal{N}_d$ は上と類似の構成を旗多様体 \mathcal{B}_d の代わりに $n+1$ ステップの部分旗のなす多様体 \mathcal{B}_d^n に対して行うことで得られる. すなわち,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_d^n &:= \{F^\bullet = (\mathbb{C}^d = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^{n+1} = 0 \mid F^i \text{ は部分ベクトル空間}\}, \\ \mathfrak{M}_d^n &:= \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_d^n \times \mathcal{N}_d \mid x(F^{k-1}) \subset F^k, 1 \leq \forall k \leq n+1\}, \end{aligned}$$

であって $\pi(F^\bullet, x) = x$ である. 多様体 $\mathcal{N}_d, \mathcal{F}_d, \mathfrak{M}_d^n$ には自然な $GL_d(\mathbb{C})$ 作用に加えて, 1次元代数的トーラス \mathbb{C}^\times の作用 $\mathbb{C}^\times \ni t: x \mapsto t^2x$ が入る. このとき, μ, π はともに $\mathbb{G}_d := GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ 作用に関して同変な固有射である.

簡単のため $A := R(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ とおき, \mathbb{k} を $X \mapsto q$ によって A 代数とみなす. Kazhdan-Lusztig および Ginzburg は \mathbb{k} 代数の同型 $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d) \cong K^{\mathbb{G}_d}(\mathcal{F}_d \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k}$ が存在することを示した (cf. [6]). 一方, Ginzburg-Vasserot [11] は \mathbb{k} 代数の準同型 $\Phi: U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \rightarrow K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_d^n \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k}$ を構成した. これらを踏まえたうえで, 前節のレシビにより, 通常の量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性が幾何学的に実現される.

定理 4.1 (Ginzburg-Reshtikhin-Vasserot [10]). 同型 $\mathbb{V}^{\otimes d} \cong K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_d^n \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k}$ であって, 次の図式を可換にするようなものが存在する:

$$\begin{array}{ccccc} U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) & \hookrightarrow & \mathbb{V}^{\otimes d} & \hookrightarrow & H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_d^n \times_{\mathcal{N}_d} \mathfrak{M}_d^n) \otimes_A \mathbb{k} & \hookrightarrow & K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_d^n \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k} & \hookrightarrow & K^{\mathbb{G}_d}(\mathcal{F}_d \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k} \end{array}$$

4.3. Dynkin 籠に付随する場合

Dynkin 籠 $Q = (I, \Omega)$ と元 $\beta = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in \mathbb{Q}^+$ からなる組 (Q, β) を固定する. また, 前と同様に $d := \text{ht}(\beta) = \sum_{i \in I} d_i$ とおく.

各 $i \in I$ に対して d_i 次元ベクトル空間 $D_i = \mathbb{C}^{d_i}$ を固定し, 集合 I で次数付けられたベクトル空間 $D := \bigoplus_{i \in I} D_i$ を考える. このとき, 前節の $\mathcal{N}_d, \mathcal{B}_d, \mathcal{F}_d$ の籠 Q に付随する類似として, 多様体 $E_\beta, \mathcal{B}_\beta, \mathcal{F}_\beta$ をそれぞれ次のように定義する:

$$\begin{aligned} E_\beta &:= \bigoplus_{(i \rightarrow j) \in \Omega} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(D_i, D_j), \\ \mathcal{B}_\beta &:= \{F^\bullet = (D = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \dots \supseteq F^d = 0) \mid F^k \text{ は } I \text{ 次数付き部分ベクトル空間}\}, \\ \mathcal{F}_\beta &:= \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_\beta \times E_\beta \mid x(F^{k-1}) \subset F^k, 1 \leq \forall k \leq d\}. \end{aligned}$$

ここで, E_β は籠 Q の次元ベクトル β の表現の空間であり, 多様体としては単にアフィン空間である. 各多様体には群 $G_\beta := \prod_{i \in I} GL(D_i)$ が自然に作用し, 射 $\mu: \mathcal{F}_\beta \rightarrow E_\beta$ を $\mu(F^\bullet, x) = x$ で定義すれば, これは G_β 同変な固有射であることが分かる. これらはもともと Lusztig によって量子群の標準基底 (canonical basis) を構成する際に導入され

たものであるが, Varagnolo-Vasserot [26] はこれを用いて籠 Hecke 環 $H_Q(\beta)$ が幾何学的に実現できることを示した. 特に [26] の結果から \mathbb{k} 代数の同型

$$\widehat{H}_Q(\beta) \cong \widehat{K}^{G_\beta}(\mathcal{F}_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)_{\mathbb{k}}$$

を導くことができる. ただし, $\widehat{K}^G(-)_{\mathbb{k}}$ は同変 K 群 $K^G(-) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ の標準的な完備化を表す.

一方, アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ の表現を幾何学的に実現する多様体としては, 中島による籠多様体 $\pi: \mathfrak{M}(W) \rightarrow \mathfrak{M}_0(W)$ がある. 詳しい構成はここでは述べないが, これらは籠 Q の枠付き表現の空間の余接束から Hamilton 簡約によって構成され, 枠に対応する I 次数付きベクトル空間 $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ を入力データに持つ. Hamilton 簡約で商をとるときの安定性パラメータを変えることで非特異な多様体 $\mathfrak{M}(W)$ と一般には特異点を持つアフィン多様体 $\mathfrak{M}_0(W)$ との2種類が構成される. とともに群 $\mathbb{G}_W := \prod_{i \in I} GL(W_i) \times \mathbb{C}^\times$ の作用をもち, 自然な固有射 $\pi: \mathfrak{M}(W) \rightarrow \mathfrak{M}_0(W)$ は \mathbb{G}_W 同変になる. 中島 [22] は各 W に対して, \mathbb{k} 代数の準同型

$$\Phi: U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \rightarrow K^{\mathbb{G}_W}(\mathfrak{M}(W) \times_{\mathfrak{M}_0(W)} \mathfrak{M}(W)) \otimes_A \mathbb{k} \quad (3)$$

を構成した. 籠 Q が A_n 型で $W_i = \mathbb{C}^{\delta_{1id}}$ のとき籠多様体 $\pi: \mathfrak{M}(W) \rightarrow \mathfrak{M}_0(W)$ は前節の $\pi: \mathfrak{M}_d^n \rightarrow \pi(\mathfrak{M}_d^n)$ と同じになり, 中島 [22] の構成は Ginzburg-Vasserot [11] の構成の一般化を与える.

今, 与えられた (Q, β) から I 次数付きベクトル空間 $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$ と1次元トーラス $T_\beta \subset \mathbb{G}_W$ を適切に定めて, 籠多様体 $\pi: \mathfrak{M}(W) \rightarrow \mathfrak{M}_0(W)$ の T_β 固定点部分として, $\pi^\bullet: \mathfrak{M}_\beta^\bullet \rightarrow \mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet$ なる固有射を得る. 正確には単純ルート α_i の AR 籠における座標を $\phi_Q(\alpha_i) = (k_i, q^{p_i})$ と書いて,

$$W_i := \bigoplus_{j: k_j=i} D_j, \quad T_\beta := \left\{ \left(\bigoplus_{j \in I} t^{p_j} \text{id}_{D_j}, t \right) \mid t \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

と定義し, $\mathfrak{M}_\beta^\bullet := \mathfrak{M}(W)^{T_\beta}$, $\mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet := \mathfrak{M}_0(W)^{T_\beta}$ と定める. 一般にこのようなトーラスに関する籠多様体の固定部分を**次数付き籠多様体**と呼ぶ. トーラス $T_\beta \subset \mathbb{G}_W$ の中心化群は自然に群 $G_\beta = \prod_{i \in I} GL(D_i)$ を含んでおり, 固有射 $\pi^\bullet: \mathfrak{M}_\beta^\bullet \rightarrow \mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet$ は G_β 同変になる. 中島の準同型 (3) において値域を T_β に対応する表現環 $R(\mathbb{G}_W) \otimes_A \mathbb{k}$ の極大イデアルに関して完備化し, さらに局所化定理を適用することで準同型写像

$$\widehat{\Phi}: U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \rightarrow \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}_\beta^\bullet \times_{\mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet} \mathfrak{M}_\beta^\bullet)_{\mathbb{k}}$$

を得る. 我々の構成の鍵は定理 3.6 の幾何学的根拠として証明された次の事実である.

定理 4.2 (Hernandez-Leclerc [12]). G_β 多様体としての同型 $\mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet \cong E_\beta$ が存在する.

これにより, 次の図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_\beta^\bullet & & \mathcal{F}_\beta \\ \pi^\bullet \searrow & & \swarrow \mu \\ \mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet \cong E_\beta & & \curvearrowright G_\beta \end{array}$$

この図式にはレシピを適用することができて、結果として籠 Q に付随する Schur-Weyl 双対性の幾何学的実現を得る.

定理 4.3 ([9]). 同型 $\widehat{V}^{\otimes\beta} \cong \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}_\beta^\bullet \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)_\mathbb{k}$ であって、次の図式を可換にするようなものが存在する:

$$\begin{array}{ccccc}
 U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) & \curvearrowright & \widehat{V}^{\otimes\beta} & \curvearrowright & \widehat{H}_Q(\beta) \\
 \downarrow \widehat{\Phi} & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}_\beta^\bullet \times_{E_\beta} \mathfrak{M}_\beta^\bullet)_\mathbb{k} & \curvearrowright & \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}_\beta^\bullet \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)_\mathbb{k} & \curvearrowright & \widehat{K}^{G_\beta}(\mathcal{F}_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)_\mathbb{k}
 \end{array}$$

注意 4.4. 籠 Q が A_n 型単調籠 $Q = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n)$ のとき、定理 4.3 の図式は定理 4.1 の図式を適切に完備化することによって得られる. このことは注意 3.10 の幾何学的説明を与えている.

5. 補足

本稿で扱った「籠 Q に付随する Schur-Weyl 双対性」は、実際には Kang-柏原-Kim [14] によるもっと一般的な枠組みにおけるひとつの重要だが特殊な例である. [14] では、(ADE 型に限らない) アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の良い表現の族を入力データとして与えたとき、それらのテンソル積の間の正規 R 行列の極とその位数のデータから (Dynkin 型に限らない) 籠 Q を決め、対応する籠 Hecke 環 H_Q の加群圏からのモノイダル関手 $\mathcal{F}: H_Q\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$ を構成する一般的な手続きが示されている. その特殊例として、本稿で扱ったもの以外にも、興味深い関手が多く構成されている [15, 16, 18, 19, 20, 23]. それらに対しても、例えば本稿で述べたような方法 (幾何学的解釈など) を用いてより深い理解が得られるかどうかは今後追究すべき課題のひとつである.

参考文献

- [1] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), no. 3, 451–484.
- [2] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras and their representations*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 59–78.
- [3] ———, *Quantum affine algebras and affine Hecke algebras*, Pacific J. Math. **174** (1996), no. 2, 295–326.
- [4] ———, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory **5** (2001), 191–223.
- [5] I.V. Cherednik, *A new interpretation of Gel'fand-Tsetlin bases*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 563–577.
- [6] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
- [7] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The q -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of \mathcal{W} -algebras.*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), Contemp. Math., no. 248, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 163–205.
- [8] R. Fujita, *Affine highest weight categories and quantum affine Schur-Weyl duality of Dynkin quiver types*, preprint. arXiv:1710.11288.

- [9] ———, *Geometric realization of Dynkin quiver type quantum affine Schur-Weyl duality*, Int. Math. Res. Not. (2018), published online.
- [10] V. Ginzburg, N. Reshetikhin, and E. Vasserot, *Quantum groups and flag varieties*, Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, MA, 1992), Contemp. Math., no. 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 101–130.
- [11] V. Ginzburg and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n* , Int. Math. Res. Not. **3** (1993), 67–85.
- [12] H. Hernandez and B. Leclerc, *Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras*, J. Reine Angew. Math. **701** (2015), 77–126.
- [13] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and R -matrices of quantum affine algebras, II*, Duke Math. J. **164** (2015), no. 8, 1549–1602.
- [14] ———, *Symmetric quiver Hecke algebras and R -matrices of quantum affine algebras*, Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 591–685.
- [15] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh, *Symmetric quiver Hecke algebras and R -matrices of quantum affine algebras, III*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 2, 420–444.
- [16] ———, *Symmetric quiver Hecke algebras and R -matrices of quantum affine algebras, IV*, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 4, 1987–2015.
- [17] M. Kashiwara, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. **73** (1994), no. 2, 383–413.
- [18] M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh, *Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type A and B* , Proc. London Math. Soc. **118** (2019), 43–77.
- [19] M. Kashiwara, M. Kim, S.-j. Oh, and Park. E., *Cluster algebra structures on module categories over quantum affine algebras*, preprint. arXiv:1904.01264.
- [20] M. Kashiwara and S.-j. Oh, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: Doubly laced types*, J. Algebr. Comb. **49** (2019), no. 4, 401–435.
- [21] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.
- [22] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 145–238.
- [23] S.-j. Oh and T. Scrimshaw, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: Exceptional cases*, Comm. Math. Phys. **368** (2019), no. 1, 295–367.
- [24] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, preprint. arXiv:0812.5023.
- [25] ———, *Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras*, Algebra Colloq. **19** (2012), 359–410.
- [26] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Canonical bases and KLR-algebras*, J. Reine Angew. Math. **659** (2011), 67–100.