

The Arakawa-Suzuki functor on the deformed BGG category of the general linear Lie algebra

藤田遼 (Ryo FUJITA) *

1 Motivation

一般線形 Lie 環 $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}) = \text{Mat}_m(\mathbb{C})$ の標準的な三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_+$ を考える. ただし, e_{ij} を (i, j) 行列単位として $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} \mathbb{C}e_{ij}$, $\mathfrak{t} = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}e_{ii}$ とする.

定義 1.1. 一般線形 Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ の Bernstein-Gelfand-Gelfand(BGG) 圏 \mathcal{O} を以下の性質をみたす加群 M からなる $U(\mathfrak{g})\text{-Mod}$ ^{*1} の充満部分圏として定義する:

- (1) M は $U(\mathfrak{g})$ 加群として有限生成である;
- (2) M は $U(\mathfrak{n}_+)$ 作用について局所有限である;
- (3) M は \mathfrak{t} 作用に関して, 有限次元の同時固有空間 (ウェイト空間) の直和に分解する. すなわち, 各 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda := \mathbb{Z}^m$ に対し, $M_\lambda := \{v \in M \mid e_{ii}v = \lambda_i v, (1 \leq i \leq m)\}$ は有限次元であり, $U(\mathfrak{t})$ 加群としての直和分解 $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ がある.

注意 1.2. 本稿では簡単のためウェイトはすべて整ウェイトとする.

BGG 圏 \mathcal{O} はアーベル圏であり, 各対象は有限長の組成列を持つ. 圏 \mathcal{O} の単純対象は既約最高ウェイト加群であり, これは最高ウェイトが支配的でない限り無限次元である. 既約最高ウェイト加群は Verma 加群の単純商として構成される. 圏 \mathcal{O} は有限次元加群圏と違って半単純ではないが, Verma 加群 (及びその双対) が単純対象及び射影対象と相補的に関係し, 非常に良いホモロジー代数的性質を持つ. これを抽象化したのが Cline-Parshall-Scott [4] による “最高ウェイト圏” の概念である

さて, H_n を GL_n の退化アフィン Hecke 環とし, $H_n\text{-mod}_{\text{fd}}$ で H_n の有限次元加群圏を表す. 荒川-鈴木は [1, 11] において, 共形場理論のアイデアに基づいて, 完全関手 $\mathcal{O} \rightarrow H_n\text{-mod}_{\text{fd}}$ を代数的に構成した. この関手は \mathfrak{g} の Verma 加群を H_n の放物誘導加群 (放物型部分環の 1 次元表現からの誘導として得られる) に写し, H_n の既約表現の指標の決定問題を圏 \mathcal{O} における Kazhdan-Lusztig 予想に帰着させるという意味で良い対応を与える.

一方で, 最近の研究 (Brundan-Kleshchev-McNamara [3], 加藤 [7]) により, H_n (の中心指標に関する完備化) の有限生成加群圏には最高ウェイト圏の変種である “アフィン最高ウェイト圏” の構造が存在することが明らかになった. そこで, 荒川-鈴木関手を使って, Lie 環サイドと Hecke 環サイドの表現論を圏の構造に

* 京都大学理学研究科数学教室, E-mail: rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

^{*1} 本稿を通じて, 代数 A に対し, $A\text{-Mod}$ はすべての左 A 加群のなす圏を, $A\text{-mod}$ はすべての有限生成左 A 加群のなす圏を表すとする.

着目してより精密に比較できないかと考えたい。ところが、Hecke 環サイドのアフィン最高ウェイト圏では組成列は有限長とは限らず、放物誘導加群の極大自己拡大が重要な役割を担っており、アーベル圏としては Lie 環サイドの圏 \mathcal{O} と比べて非常に大きい。そこで関手の定義域として Lie 環サイドの圏を、BGG 圏 \mathcal{O} を含み、一般には組成列が無限長の加群からなり、特に Verma 加群の極大自己拡大を含む圏にまで広げたい。そのためには BGG 圏の定義 1.1(3) の“同時固有空間”を“同時一般固有空間”にゆるめ、さらに Verma 加群の極大自己拡大が存在できるように射影極限で閉じた圏を考えるべきである。このように考えると、BGG 圏の代わりに変形 BGG 圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ を考えるというアイデアに自然に行き着く。変形 BGG 圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ は Soergel [9, 10] によって導入され、Kazhdan-Lusztig 型の組み合わせ論への圏論的アプローチである Soergel 双加群の理論の端緒となった興味深い研究対象である。

本稿では荒川-鈴木関手を変形 BGG 圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ 上で考察し、関手が変形 BGG 圏のブロックを退化アフィン Hecke 環の加群圏に充滿忠実に埋め込むことを見る。充滿忠実性の証明には、アフィン最高ウェイト圏における傾加群 (tilting module) の理論 [6] を応用する。

2 BGG 圏 \mathcal{O} と変形 BGG 圏 $\tilde{\mathcal{O}}$

ウェイトの集合 Λ に半順序 \leq を

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \sum_{i=1}^j \mu_i, & (\forall j = 1, 2, \dots, m-1); \\ \text{and } \sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i \end{cases}$$

によって定義する。ウェイト $\lambda \in \Lambda$ は $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ をみたすとき支配的であるといい、支配的ウェイト全体の集合を Λ^+ とする。ウェイトの集合 Λ には自然に対称群 \mathfrak{S}_m が作用し、各 \mathfrak{S}_m 軌道は \leq に関する最大元として支配的ウェイトをただひとつ含むことに注意する。

支配的ウェイト $\rho := (0, -1, -2, \dots, -m+1) \in \Lambda^+$ を固定し、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、最高ウェイト $\lambda - \rho$ の Verma 加群を $M(\lambda)$ 、その唯一単純商を $L(\lambda)$ とする。定義より $M(\lambda), L(\lambda) \in \mathcal{O}$ であり、圏 \mathcal{O} の任意の単純対象はある $\lambda \in \Lambda$ について $L(\lambda)$ に同型である。Harish-Chandra の定理より、 $\mathfrak{S}_m \lambda \cap \mathfrak{S}_m \mu = \emptyset$ ならば $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(L(\lambda), L(\mu)) = 0$ であることが従う。よって、支配的ウェイト $\lambda \in \Lambda^+$ に対し、 λ の \mathfrak{S}_m 軌道 $\Pi_\lambda := \mathfrak{S}_m \lambda$ に属するウェイトに対応する単純対象たち $\{L(\mu) \mid \mu \in \Pi_\lambda\}$ が生成する圏 \mathcal{O} の Serre 部分圏を \mathcal{O}_λ とすると、圏 \mathcal{O} のブロック分解 $\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} \mathcal{O}_\lambda$ を得る。

各ブロック \mathcal{O}_λ は [4] の意味で最高ウェイト圏である。すなわち、各 $\mu \in \Pi_\lambda$ について

- (1) Verma 加群の根基 $\text{rad } M(\mu)$ (自然な全射 $M(\mu) \rightarrow L(\mu)$ の核) の各組成因子はある $\nu < \mu$ ($\nu \in \Pi_\lambda$) に対応する単純対象 $L(\nu)$ に同型である;
- (2) 単純加群 $L(\mu)$ の射影被覆 $P(\mu) \in \mathcal{O}_\lambda$ について、自然な全射 $P(\mu) \rightarrow M(\mu)$ の核は $\nu > \mu$ ($\nu \in \Pi_\lambda$) に対応する Verma 加群 $M(\nu)$ たちによるフィルトレーションを持つ。

また、双対 Verma 加群 ($:=$ Verma 加群の restricted dual) $M(\mu)^\vee \in \mathcal{O}_\lambda$ は次の性質で特徴づけられる:

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^i(M(\nu), M(\mu)^\vee) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, \nu = \mu; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.1)$$

ウェイト $\mu, \nu \in \Pi_\lambda$ に対して、双対 Verma 加群 $M(\mu)^\vee$ における $L(\nu)$ の組成重複度を $[M(\mu)^\vee : L(\nu)]$ 、直既約射影加群 $P(\nu)$ の Verma フィルトレーションにおける $M(\mu)$ の重複度を $(P(\nu) : M(\mu))$ とすると、(2.1) により、等式 $(P(\nu) : M(\mu)) = [M(\mu)^\vee : L(\nu)]$ が成り立つ (BGG 相互律)。

さて、次に変形 BGG 圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ を定義し、その性質を述べよう。 $R := \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_m]]$ を m 変数形式的冪級数環とし、 \mathfrak{m} でその極大イデアルを表す。 $\text{Spec } R$ は \mathfrak{t}^* の原点 0 における形式的無限小近傍と見なせる。

定義 2.1. 一般線形 Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ の変形 BGG 圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ を、以下の性質をみたす加群 M たちのなす (\mathfrak{g}, R) 双加群全体のなす圏 $(U(\mathfrak{g}) \boxtimes_{\mathbb{C}} R)\text{-Mod}$ の充満部分圏として定義する：

- (1) M は (\mathfrak{g}, R) 双加群として有限生成である；
- (2) M は $U(\mathfrak{n}_+)$ 作用について局所有限である；
- (3) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、部分 (\mathfrak{t}, R) 双加群 $M_{(\lambda)} := \{v \in M \mid e_{ii}v = v(\lambda_i + z_i), (1 \leq i \leq m)\}$ は (右) R 加群として有限生成であり、 (\mathfrak{t}, R) 双加群としての直和分解 $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_{(\lambda)}$ がある。

圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ は Noether 的アーベル圏だが、対象の組成列は一般に無限長である。圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ において R が自明に作用 (すなわち、 \mathfrak{m} が 0 で作用) する対象がなす充満部分圏は通常の BGG 圏 \mathcal{O} と自然に同一視される。

圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ には、Verma 加群の極大自己拡大として以下に定義する変形 Verma 加群が属す。各 $\lambda \in \Lambda$ に対して最高ウェイト $\lambda - \rho$ の変形 Verma 加群 $\tilde{M}(\lambda)$ を誘導によって

$$\tilde{M}(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_+)} R_{\lambda - \rho}$$

と定義する。ただし、ここで R_{μ} は以下の性質で決まる $(\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_+, R)$ 双加群である：

- (右) R 加群として $R_{\mu} \cong R$ ；
- $e_{ii} \cdot 1 = \mu_i + z_i \quad (1 \leq i \leq m)$ ；
- $e_{ij} \cdot 1 = 0 \quad (1 \leq i < j \leq m)$ 。

定義より、 $\tilde{M}(\lambda)/\tilde{M}(\lambda)\mathfrak{m} \cong M(\lambda)$ であるので、変形 Verma 加群は通常の Verma 加群 $M(\lambda)$ を \mathfrak{t}^* の原点の無限小近傍上で変形した加群と見なせる。

定理 2.2 (Soergel [9, 10], Fiebig [5] ^{*2}). 変形 BGG 圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ について、以下が成り立つ：

- (1) 各 $\lambda \in \Lambda^+$ に対し、変形 Verma 加群たち $\{\tilde{M}(\mu) \mid \mu \in \Pi_{\lambda}\}$ が生成する圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ の Serre 部分圏を $\tilde{\mathcal{O}}_{\lambda}$ とすると、アーベル圏の直和分解 $\tilde{\mathcal{O}} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} \tilde{\mathcal{O}}_{\lambda}$ がある (ブロック分解)。また、 R が自明に作用する $\tilde{\mathcal{O}}_{\lambda}$ の充満部分圏は \mathcal{O}_{λ} に自然に同一視される；
- (2) 各ブロック $\tilde{\mathcal{O}}_{\lambda}$ は以下の性質をみたす：
 - (a) 単純加群 $L(\mu)$ ($\mu \in \Pi_{\lambda}$) の圏 $\tilde{\mathcal{O}}_{\lambda}$ における射影被覆 $\tilde{P}(\mu)$ が存在して、 $\tilde{P}(\mu)/\tilde{P}(\mu)\mathfrak{m} \cong P(\mu)$ をみたす。さらに、自然な全射 $\tilde{P}(\mu) \rightarrow \tilde{M}(\mu)$ の核は $\nu > \mu$ ($\nu \in \Pi_{\lambda}$) に対応する変形 Verma 加群 $\tilde{M}(\nu)$ たちによるフィルトレーションを持つ；
 - (b) 各 $\mu \in \Pi_{\lambda}$ について、 $\text{End}_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{M}(\mu)) \cong R$ ；
 - (c) 各 $\mu, \nu \in \Pi_{\lambda}$ について、 $\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{P}(\mu), \tilde{M}(\nu))$ は有限階数の自由 $\text{End}_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{M}(\nu)) (\cong R)$ 加群である；
 - (d) 双対 Verma 加群 $M(\nu)^{\vee}$ ($\nu \in \Pi_{\lambda}$) は圏 $\tilde{\mathcal{O}}_{\lambda}$ において次の性質で特徴付けられる：

$$\text{Ext}_{\tilde{\mathcal{O}}}^i(\tilde{M}(\nu), M(\mu)^{\vee}) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, \nu = \mu; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特に $(\tilde{P}(\nu) : \tilde{M}(\mu)) = [M(\mu)^{\vee} : L(\nu)]$ が成り立つ (BGG 相互律)。 □

^{*2} Fiebig は Soergel の仕事を Kac-Moody 代数の場合に一般化した。

単純対象が有限半順序集合でパラメータ付けられ、定理 2.2(2) の条件 (a), (b), (c) をみたす圏を一般にアフィン最高ウェイト圏と呼ぶ。アフィン最高ウェイト圏は、Kleshchev [8] によって次数付き代数の設定で導入され、通常最高ウェイト圏に類似の、例えば上記定理 2.2 (2) の (d) のような良いホモロジー代数的性質をみたす。一般のアフィン最高ウェイト圏においては、圏 $\tilde{\mathcal{O}}$ の変形 Verma 加群に対応する対象を標準対象 (standard object), Verma 加群に対応する対象を被約標準対象 (proper standard object), 双対 Verma 加群に対応する対象を被約余標準対象 (proper costandard object) と呼び、標準対象の自己準同型環が (次数付き, あるいは完備な) アフィン代数であることを要請する^{*3}。一般には標準対象ごとに自己準同型環の構造は異なる。ウェイト $\mu \in \Pi_\lambda$ にかかわらず $\text{End}_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{M}(\mu)) \cong R$ となるのは、変形 BGG 圏の特殊事情である。

3 退化アフィン Hecke 環の表現論

ここでは、退化アフィン Hecke 環 H_n のアフィン最高ウェイト表現論について概観する。

定義 3.1. GL_n の退化アフィン Hecke 環 H_n は $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ を生成元として、以下の関係式で定義される \mathbb{C} 代数である：

$$\begin{aligned} x_i x_j &= x_j x_i, & s_i^2 &= 1, \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, & s_i s_j &= s_j s_i \quad \text{if } |i-j| > 1, \\ x_{i+1} s_i &= s_i x_i + 1, & x_j s_i &= s_i x_j \quad \text{if } j \neq i, i+1. \end{aligned}$$

定義より、 H_n において $\{x_1, \dots, x_n\}$ が生成する部分代数は n 変数多項式環 $P_n := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ に同型であり、 $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ が生成する部分代数は n 次対称群 \mathfrak{S}_n の群代数 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ に同型である。

命題 3.2 (Bernstein, Lusztig).

- (1) $(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n, P_n)$ 双加群として、 $H_n \cong \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes_{\mathbb{C}} P_n$;
- (2) 退化アフィン Hecke 環 H_n の中心 $Z(H_n)$ は対称多項式環と同一視される。すなわち、 $Z(H_n) = (P_n)^{\mathfrak{S}_n}$. □

さて、次の図のような、整数の集合 \mathbb{Z} を頂点集合とする A_∞ 型の線形籠 Γ_∞ を考える：

$$\Gamma_\infty \quad \dots \longrightarrow \overset{-2}{\circ} \longrightarrow \overset{-1}{\circ} \longrightarrow \overset{0}{\circ} \longrightarrow \overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{2}{\circ} \longrightarrow \dots$$

$Q := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}\alpha_i$ で A_∞ 型のルート格子を表し、 $Q^+ := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ を単純ルートの張るモノイドとする。相異なる整数 $i, j \in \mathbb{Z} (i < j)$ に対して、対応する整ルート $\alpha(i, j)$ を $\alpha(i, j) := \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1} \in Q^+$ によって定める。また、各元 $\beta = \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i \alpha_i \in Q^+$ についてその高さを $\text{ht}(\beta) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i$ で決める。

今、元 $\beta \in Q^+$ の高さが、退化アフィン Hecke 環 H_n のランク n に等しい、すなわち $\text{ht}(\beta) = n$ であるとしよう。このとき、 β を n 個の整数の (順序なしの) 組とみなす。すなわち、 $\beta \in \mathbb{Z}^n / \mathfrak{S}_n \subset \mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n = \text{Specm}(Z(H_n))$ である。ここで最後の等号には命題 3.2 (2) を用いた。こうして、 H_n の中心 $Z(H_n)$ の β における完備化 $\hat{Z}(H_n)_\beta$ を考えることができ、 H_n の β における中心完備化を $\hat{H}_\beta := H_n \otimes_{Z(H_n)} \hat{Z}(H_n)_\beta$ によって定義する。中心完備化 \hat{H}_β の有限次元加群は、 H_n の有限次元加群であって各 $z \in Z(H_n) = \mathbb{C}[\mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n]$ に対して $z - z(\beta)$ が冪零に作用するものと自然に同一視できる。すなわち、後者のなすアーベル圏 $H_n\text{-mod}_{\text{fd}, \beta}$ は自

^{*3} これがアフィン最高ウェイト圏の “アフィン” の由来である。

然に $\hat{Z}(H_n)_\beta\text{-mod}$ の充満部分圏である。また、中心完備化 \hat{H}_β の単純加群はすべて有限次元である。中心完備化 \hat{H}_β の単純加群 (の同型類) は β の Kostant 分割, すなわち正ルートの集合 $\pi = \{\alpha(i_1, j_1), \dots, \alpha(i_m, j_m)\}$ で、 $\alpha(i_1, j_1) + \dots + \alpha(i_m, j_m) = \beta$ をみたすものによってパラメトライズされることが知られている。 β の Kostant 分割全体のなす有限集合を $\text{KP}(\beta)$ と表す。

一方、 $\beta \in Q^+$ に対し、線形圏 Γ_∞ の表現で次元ベクトルが β に一致するもの全体の空間 $\mathfrak{L}(\beta) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n_i}, \mathbb{C}^{n_{i+1}})$ を考えよう。空間 $\mathfrak{L}(\beta)$ には自然に群 $G(\beta) := \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{GL}(\mathbb{C}^{n_i})$ が作用し、その軌道は表現の同型類に対応する。圏 Γ_β の直既約表現の同型類はその次元ベクトルで決まり、それはある正ルート $\alpha(i, j)$ に一致する。したがって、次の 2 つの集合の間の自然な 1 : 1 対応が存在する：

$$\text{KP}(\beta) \xleftrightarrow{1:1} \mathfrak{L}(\beta)/G(\beta) = \{\mathfrak{L}(\beta) \text{ における } G(\beta) \text{ 軌道}\}.$$

右辺には $G(\beta)$ 軌道の閉包の包含関係によって半順序が定まっている。そこで、この半順序の逆が上記 1 : 1 対応を通じて $\text{KP}(\beta)$ に定める半順序を \leq で表すことにする。

定理 3.3 (Brundan-Kleshchev-McNamara [3], 加藤 [7]). 中心完備化 \hat{H}_β 上の有限生成加群圏 $\hat{H}_\beta\text{-mod}$ は、半順序集合 $(\text{KP}(\beta), \leq)$ に関してアフィン最高ウェイト圏である。□

実際には、[3] および [7] は有限型 KLR 代数の加群圏がアフィン最高ウェイト圏の構造を有することを証明している。退化アフィン Hecke 環についての上記定理 3.3 は、 β に対応する A_∞ 型の KLR 代数の完備化が \hat{H}_β に同型であるという Brundan-Kleshchev [2] の定理を介して従う。

4 荒川-鈴木関手

この節では荒川-鈴木関手の構成と本稿の主結果を述べる。

最初は、Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ のランク m と退化アフィン Hecke 環 H_n のランク n は互いに無関係にとる。

Lie 環 \mathfrak{g} の Casimir 作用素 $\Omega \in U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ を $\Omega := \sum_{1 \leq i, j \leq m} e_{ij} \otimes e_{ji}$ で定義する。Lie 環 \mathfrak{g} の表現 M_1, M_2 に対し、それらのテンソル積 $M_1 \otimes M_2$ には Ω が、 \mathfrak{g} 作用と可換な線形作用素として作用する。これを $\Omega(M_1, M_2) \in \text{End}_{\mathfrak{g}}(M_1 \otimes M_2)$ と書き表すことにする。

さて、 $V := \mathbb{C}^m$ を $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ のベクトル表現とする。

命題 4.1 (荒川-鈴木 [1, 11]). 任意の \mathfrak{g} 加群 M に対し、テンソル積空間 $M \otimes V^{\otimes n}$ 上に退化アフィン Hecke 環 H_n の右作用が次で定まる：

- 対称群 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \subset H_n$ は $V^{\otimes n}$ のテンソル成分の置換で作用する；
- 多項式生成元 x_i は Casimir 作用素 $\Omega(M \otimes V^{\otimes(i-1)}, V) \otimes \text{id}_V^{\otimes(n-i)}$ として作用する。

言い換えると、上記により \mathbb{C} 代数の準同型 $H_n \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{g}}(M \otimes V^{\otimes n})^{\text{op}}$ を得る。□

定義 4.2. 命題 4.1 において $M = \widetilde{M}(\rho)$ ととることによって、荒川-鈴木関手 Φ を次のように定義する：

$$\Phi : \widetilde{\mathcal{O}}(\mathfrak{gl}_m) \rightarrow H_n\text{-Mod}; M \mapsto \text{Hom}_{\widetilde{\mathcal{O}}}(\widetilde{M}(\rho) \otimes V^{\otimes n}, M).$$

定理 2.2 で記述したアフィン最高ウェイト圏の構造により、支配的ウェイト ρ に対応する変形 Verma 加群 $\widetilde{M}(\rho)$ は圏 $\widetilde{\mathcal{O}}$ の射影対象であり、したがって有限次元表現とのテンソル積 $\widetilde{M}(\rho) \otimes V^{\otimes n}$ も $\widetilde{\mathcal{O}}$ の射影対象である。ゆえに、荒川-鈴木関手 Φ は完全関手である。

注意 4.3. 荒川-鈴木 [1, 11] は、一般の支配的ウェイト ν に対応する（通常の）Verma 加群を用いて、関手

$$\bar{\Phi}_\nu := \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M(\nu) \otimes V^{\otimes n}, -) : \mathcal{O} \rightarrow H_n\text{-mod}_{\text{fd}}$$

を定義し、考察している。本稿の定義 4.2 は Verma 加群の代わりに変形 Verma 加群を用いて、しかも簡単のためウェイトを ρ に固定している。しかし、定義 4.2 の関手を通常の BGG 圏 \mathcal{O} に制限したものは Verma 加群 $M(\rho)$ を用いて定義したものと一致する。すなわち $M \in \mathcal{O}$ ならば $\Phi(M) = \bar{\Phi}_\rho(M)$ が成り立つ。また、本稿の主定理 4.4 は ρ を任意の正則支配的ウェイト ν に置き換えても同様に成り立つ。

さて、支配的ウェイト $\lambda \in \Lambda^+$ で、条件 $\lambda_m > 0$ をみたまものを固定する*4。この λ に対して $\beta \in Q^+$ を、 $\beta := \sum_{i=1}^m \alpha(\rho_i, \lambda_i)$ と定め、退化アフィン Hecke 環 H_n のランク n を $n := \text{ht}(\beta)$ と取り直す。各ウェイト $\mu \in \Pi_\lambda$ に対して Kostant 分割 $\pi_\mu \in \text{KP}(\beta)$ を

$$\pi_\mu := \{\alpha(\rho_1, \mu_1), \alpha(\rho_2, \mu_2), \dots, \alpha(\rho_m, \mu_m)\}.$$

によって定義する。条件 $\lambda_m > 0$ より π_μ は well-defined である。このとき次の定理が本稿の主結果である。

定理 4.4 ([6]). 荒川-鈴木関手はブロック $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda$ に制限することで、次の充満忠実な埋め込みを誘導する：

$$\Phi : \tilde{\mathcal{O}}_\lambda \xrightarrow{\text{f.f.}} \hat{H}_\beta\text{-mod}.$$

以下、証明の概略を説明する。アフィン最高ウェイト圏 $\hat{H}_\beta\text{-mod}$ において、Kostant 分割 $\pi \in \text{KP}(\beta)$ に対応する標準対象、被約標準対象、被約余標準対象をそれぞれ $\Delta(\pi), \bar{\Delta}(\pi), \bar{\nabla}(\pi)$ と表す。この時、各ウェイト $\mu \in \Pi_\lambda$ について直接計算によって、同型

$$\Phi(\widetilde{M}(\mu)) \cong \Delta(\pi_\mu), \quad \Phi(M(\mu)) \cong \bar{\Delta}(\pi_\mu), \quad \Phi(M(\mu)^\vee) \cong \bar{\nabla}(\pi_\mu)$$

を証明できる*5。したがって荒川-鈴木関手は自然に $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda \rightarrow \hat{H}_\beta\text{-mod}$ という完全関手を導く。

更に、パラメータの対応

$$\Pi_\lambda \ni \mu \mapsto \pi_\mu \in \text{KP}(\beta)$$

は半順序を保つ単射であり、この写像は半順序集合 Π_λ と部分半順序集合

$$\text{KP}(\beta)^{\leq \pi_\lambda} := \{\pi \in \text{KP}(\beta) \mid \pi \leq \pi_\lambda\}$$

の間の同型を与えていることがわかる。このとき一般論により、部分集合 $\text{KP}(\beta)^{\leq \pi_\lambda}$ に対応する標準加群で生成される Serre 部分圏 $\hat{H}_\beta\text{-mod}^{\leq \pi_\lambda}$ も自然にアフィン最高ウェイト圏になる。

次の命題はアフィン最高ウェイト圏における傾加群の理論を用いて証明される。

命題 4.5 ([6]). 中心 (categorical center) がともに十分大きい*6 2 つのアフィン最高ウェイト圏の間の完全関手 $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ が次の（順序を保つ）1 : 1 対応を引き起こすとする：

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}_1 \text{の標準対象 (の同型類)}\} &\xleftrightarrow{1:1} \{\mathcal{C}_2 \text{の標準対象 (の同型類)}\}, \\ \{\mathcal{C}_1 \text{の被約余標準対象 (の同型類)}\} &\xleftrightarrow{1:1} \{\mathcal{C}_2 \text{の被約余標準対象 (の同型類)}\}. \end{aligned}$$

このとき、関手 F は圏同値 $\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2$ を与える。 □

*4 この条件 $\lambda_m > 0$ は本質的ではない。なぜなら、ウェイトを一斉に平行移動することで圏同値 $\mathcal{O}_\lambda \cong \mathcal{O}_{\lambda+(k,k,\dots,k)}$ を得るからである。

*5 被約標準対象についての同型は [1] ですでに証明されている。

*6 正確には $\mathcal{C} \cong A\text{-mod}$ と書いた時、代数 A がその中心上の加群として有限生成であることが条件である。

変形 BGG 圏 $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda$ と圏 $\hat{H}_\beta\text{-mod}^{\leq \pi_\lambda}$ はともに中心が十分大きいので命題 4.5 が適用できて、荒川-鈴木関手 Φ が圏同値 $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda \simeq \hat{H}_\beta\text{-mod}^{\leq \pi_\lambda}$ を与えることが従う。以上で定理 4.4 の証明が完結する。 \square

注意 4.6. (1) アフィン最高ウェイト圏の一般論 [8] より、削除充満部分圏 $\hat{H}_\beta\text{-mod}^{\leq \pi_\lambda}$ は代数 \hat{H}_β のある商代数 $\hat{H}_\beta^{\leq \pi_\lambda}$ の加群圏と同一視できる、すなわち、 $\hat{H}_\beta\text{-mod}^{\leq \pi_\lambda} = \hat{H}_\beta^{\leq \pi_\lambda}\text{-mod}$ 。したがって定理 4.4 の我々の証明は変形 BGG 圏のブロック $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda$ が退化アフィン Hecke 環の適当な完備化の商代数上の加群圏と同一視できることを示している。

(2) Verma 加群を用いて定義されたオリジナルの荒川-鈴木関手 $\bar{\Phi}_\rho$ と定理 4.4 は次の可換図式で関連づけられる：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{O}}_\lambda & \xrightarrow{\Phi} & \hat{H}_\beta\text{-mod} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_\lambda & \xrightarrow{\bar{\Phi}_\rho} & H_n\text{-mod}_{\text{fd},\beta} \end{array}$$

上辺 Φ が充満忠実なので下辺 $\bar{\Phi}_\rho$ も充満忠実である。同様に、荒川-鈴木 [1, 11] によるオリジナルの関手 $\bar{\Phi}_\nu$ は ν が正則支配的ウェイトの時（適当なブロック \mathcal{O}_λ の上で）充満忠実である。

参考文献

- [1] T. Arakawa and T. Suzuki. Duality between $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ and the degenerate affine Hecke algebra. *Journal of Algebra*, 209:288–304, 1998.
- [2] J. Brundan and A. Kleshchev. Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras. *Invent. Math.*, 178(3):451–484, 2009.
- [3] J. Brundan, A. Kleshchev, and P. McNamara. Homological properties of finite type Khovanov-Lauda-Rouquier algebras. *Duke Math. J.*, 163(7):1353–1404, 2014.
- [4] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine. Angew. Math J.*, 58:85–99, 1988.
- [5] P. Fiebig. Centers and translation functors for the category \mathcal{O} over Kac-Moody algebras. *Math. Z.*, 243(4):689–717, 2003.
- [6] R. Fujita. Tilting modules of affine quasi-hereditary algebras. arXiv:1610.02621.
- [7] S. Kato. Poincare-Birkhoff-Witt bases and Khovanov-Lauda-Rouquier algebras. *Duke Math. J.*, 163(3):619–663, 2014.
- [8] A. Kleshchev. Affine highest weight categories and affine quasi-hereditary algebras. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(4):841–882, 2015.
- [9] W. Soergel. Kategorie \mathcal{O} , perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe. *J. Amer. Math.*, 3:421–445, 1990.
- [10] W. Soergel. The combinatorics of Harish-Chandra bimodules. *J. reine angew. Math.*, 429:49–74, 1992.
- [11] T. Suzuki. Rogawski’s conjecture on the Jantzen filtration for the degenerate affine Hecke algebra of type A. *Represent. theory (Electronic Jour. of AMS)*, 2:393–409, 1998.