

アフィン量子群の表現論入門*

藤田 遼†

表現論は種々の代数系の線形空間への作用を通じて対称性を研究する分野です。表現論で扱う代数系として単純リー代数は古典的ですが、20世紀後半以降その「アフィン化」や「量子化」といった変種が物理学との関係もあって注目を浴び、現在も様々なトピックと結びつきながら研究の進展が続いています。この講座では単純リー代数の「アフィン化+量子化」にあたるアフィン量子群の表現論について入門的な解説を試みます。特に最も簡単な単純リー代数 \mathfrak{sl}_2 に付随する場合に表現を具体的に計算し、その表現論の面白さと最新の研究成果の一端に触れたいと思います。

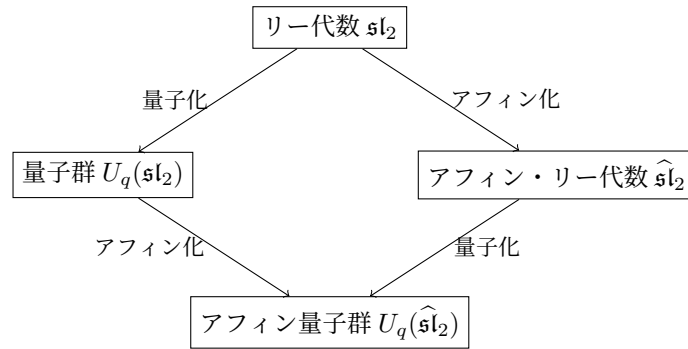


図1 本講座の登場人物関連図

目次

1	リー代数 \mathfrak{sl}_2 とその有限次元表現	2
2	量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とその有限次元表現	8
3	アフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ とその有限次元表現	14
4	アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ とその有限次元表現	20

* このノートは2025年8月4日-7日に京都大学数理解析研究所で行われた第46回数学入門公開講座の講義ノートに加筆修正を加えたもの(2025年9月24日版)です。筆者の拙い講義にお付き合いいただいた参加者の皆様、講義ノートの誤りの指摘を含め多くの有益な質問をくださった皆様にこの場を借りて御礼申し上げます。

† 京都大学数理解析研究所, rfujita@kurims.kyoto-u.ac.jp

記号の約束

本講座では複素数体を \mathbb{C} と書き, $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を非零複素数全体の集合とする. ベクトル空間は常に \mathbb{C} 上のベクトル空間を意味するものとする. ベクトル空間 V, W に対して, $\text{Hom}(V, W)$ で V から W への \mathbb{C} 線形写像全体のなすベクトル空間を表し, $\text{End}(V) := \text{Hom}(V, V)$ とおく. テンソル記号 \otimes は常に \mathbb{C} 上のテンソル積を意味するものとする. \mathbb{Z} で整数全体の集合, $\mathbb{Z}_{\geq a}$ で a 以上の整数全体の集合を表す.

1 リー代数 \mathfrak{sl}_2 とその有限次元表現

この節ではリー代数やその表現の定義から始めて, 単純リー代数 \mathfrak{sl}_2 の有限次元表現に関する基本事項を手短かに説明する.

1.1 リー代数

定義 1.1. ベクトル空間 \mathfrak{g} に, 双線型写像 $[-, -]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が与えられ, 性質

- (1) 反対称性: $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathfrak{g}$,
- (2) ヤコビ恒等式: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$,

を満たすとき, \mathfrak{g} はリー代数 (またはリー環) であるという. 演算 $[-, -]$ をリー括弧と呼ぶ.

例 1.2. 複素 n 次正方行列全体のなすベクトル空間は行列の交換子 $[A, B] := AB - BA$ によりリー代数となる. これを一般線型リー代数と呼び \mathfrak{gl}_n と書く.

例 1.3. より一般に任意のベクトル空間 V に対し, $\mathfrak{gl}(V) := \text{End}(V)$ は自己線形写像の交換子 $[f, g] := f \circ g - g \circ f$ によってリー代数となる. n 次正方行列を列ベクトルへの左からの掛け算によって数ベクトル空間 \mathbb{C}^n の自己線形写像と同一視すれば $\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$ である.

例 1.4. 任意のベクトル空間 \mathfrak{a} に $[x, y] = 0, \forall x, y \in \mathfrak{a}$ として自明なリー代数構造を付与することができる. このようにリー括弧が自明なリー代数を可換なリー代数という.

定義 1.5. 2つのリー代数の間の線形写像 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ で, すべての $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)]$$

を満たすものをリー代数の準同型写像という. 可逆な準同型写像を同型写像という. \mathfrak{g} と \mathfrak{h} の間に同型写像があるとき \mathfrak{g} と \mathfrak{h} は同型であるといい, $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$ と書く.

例 1.6. V を n 次元ベクトル空間とする. V の基底を選ぶことで, 線形同型 $\varphi: \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} V$ が定まる. このとき写像 $A \mapsto \varphi \circ A \circ \varphi^{-1}$ はリー代数の同型 $\mathfrak{gl}_n \cong \mathfrak{gl}(V)$ を定める.

1.2 リー代数の表現

定義 1.7. \mathfrak{g} をリー代数, V をベクトル空間とする. リー代数の準同型写像 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が与えられているとき, すなわちすべての $x, y \in \mathfrak{g}$ について等式

$$\rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) = \rho([x, y])$$

満たすような線形写像 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が与えられているとき, V は \mathfrak{g} の**表現**であるという. 構造射 ρ を明示したいときは $V = (V, \rho)$ などと書く. 表現 $V = (V, \rho)$ が与えられているとき, $x \in \mathfrak{g}, v \in V$ に対して

$$xv := \rho(x)(v)$$

とも書く.

定義 1.8. V をリー代数 \mathfrak{g} の表現とする.

- (1) 部分ベクトル空間 $W \subset V$ が $xW \subset W$ ($\forall x \in \mathfrak{g}$) を満たすとき, W を V の**部分表現**という.
- (2) $V \neq \{0\}$ かつ, V 自身と $\{0\}$ 以外に部分表現がないとき, V は**既約**であるという.

例 1.9. 構造射 $\rho: \mathfrak{gl}_n \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$ として恒等写像を取ることで \mathbb{C}^n を \mathfrak{gl}_n の表現とみなせる. これを \mathfrak{gl}_n の**ベクトル表現**と呼ぶ. ベクトル表現は \mathfrak{gl}_n の既約表現である.

例 1.10. 構造射が自明, すなわち $\rho = 0$ である表現 $V = (V, 0)$ を**自明表現**という. 自明表現 V が既約であるための必要十分条件は $\dim V = 1$ なることである.

例 1.11. 任意のリー代数 \mathfrak{g} に対し, 線形写像 $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ を $\text{ad}(x)(y) := [x, y]$ によって定める. このとき, ヤコビ恒等式から, 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ について

$$\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y) - \text{ad}(y) \circ \text{ad}(x) = \text{ad}([x, y])$$

が成り立つ. すなわち $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, \text{ad})$ は \mathfrak{g} の表現である. これを \mathfrak{g} の**随伴表現**という.

定義 1.12. 可換でないリー代数 \mathfrak{g} は, その随伴表現が既約であるとき, **単純リー代数**であるという.

例 1.13. リー代数 \mathfrak{gl}_n ($n > 1$) は単純でない. 実際, トレースが 0 である n 次正方行列のなすベクトル空間

$$\mathfrak{sl}_n := \{A \in \mathfrak{gl}_n \mid \text{Tr}(A) = 0\}$$

は随伴表現 $(\mathfrak{gl}_n, \text{ad})$ の非自明な部分表現である. 一方, この \mathfrak{sl}_n を行列の交換子によってリー代数と見たものは単純リー代数である. これを**特殊線形リー代数**と呼ぶ.

よく知られているように, 複素有限次元単純リー代数は同型を除いて図 2 に列挙する**ディンキン図形**によって分類される. 例えば単純リー代数 \mathfrak{sl}_{n+1} は A_n 型ディンキン図形に対応する. 詳しくは [2] などリー代数の教科書を参照されたい.

1.3 \mathfrak{sl}_2 の有限次元既約表現

ここからは A_1 型単純リー代数 \mathfrak{sl}_2 に焦点を当てる. これは

$$\mathfrak{sl}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

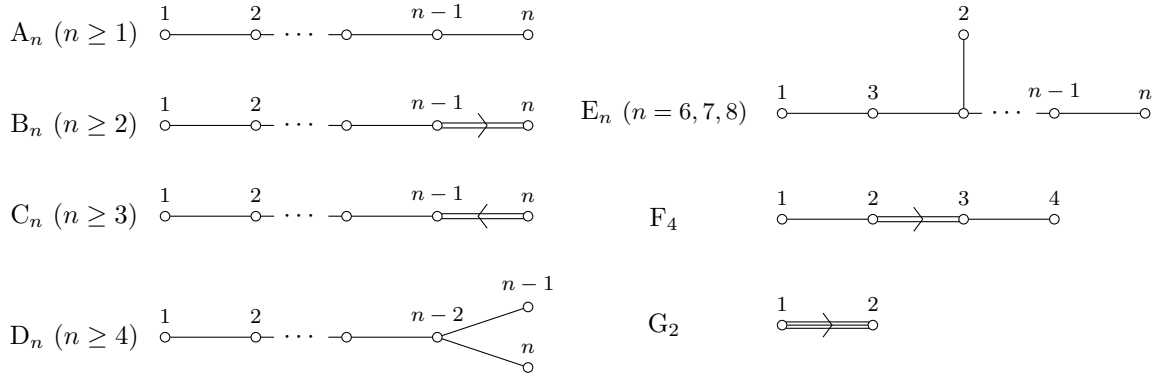


図2 ディンキン図形

なる3次元ベクトル空間を行列交換子によってリー代数とみなしたものである。基底として

$$x^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $\{x^+, x^-, h\}$ がとれる。リー代数構造は関係式

$$[h, x^\pm] = \pm 2x^\pm \quad (\text{複号同順, 以下同様}), \quad [x^+, x^-] = h$$

によって決まる。 $V = (V, \rho)$ を \mathfrak{sl}_2 の表現とすると3つの線形写像 $\rho(x^+), \rho(x^-), \rho(h) \in \text{End}(V)$ は関係式

$$\rho(h) \circ \rho(x^\pm) - \rho(x^\pm) \circ \rho(h) = \pm 2\rho(x^\pm), \quad \rho(x^+) \circ \rho(x^-) - \rho(x^-) \circ \rho(x^+) = \rho(h) \quad (1.1)$$

を満たす。逆に、ベクトル空間 V 上に関係式 (1.1) を満たす3つの自己線形写像 $\rho(x^+), \rho(x^-), \rho(h)$ が与えられたとき、構造射 $\rho: \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End}(V)$ を $\rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\rho(h) + b\rho(x^+) + c\rho(x^-)$ と定めれば V は \mathfrak{sl}_2 の表現となる。すなわち \mathfrak{sl}_2 の表現とは、関係式 (1.1) を満たす自己線形写像の3つ組 $\rho(x^+), \rho(x^-), \rho(h) \in \text{End}(V)$ を備えたベクトル空間 V のことと思える。

次の小さい方から順に \mathfrak{sl}_2 の有限次元既約表現の例を与えよう。

例 1.14 (1次元：自明表現). 1次元自明表現 $V_0 := (\mathbb{C}, 0)$ はもちろん \mathfrak{sl}_2 の既約表現である。

例 1.15 (2次元：ベクトル表現). $V_1 := \mathbb{C}^2$ とし、 $\rho_1: \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{gl}_2 = \text{End}(\mathbb{C}^2)$ を包含写像とすると、 $V_1 = (V_1, \rho_1)$ は \mathfrak{sl}_2 の既約表現である。当然だがあえて書き下せば、

$$\rho_1(x^+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(x^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 1.16 (3次元：随伴表現). 随伴表現 $(\mathfrak{sl}_2, \text{ad})$ は \mathfrak{sl}_2 の3次元既約表現である。これは

$$\text{ad}(x^+): \begin{cases} -x^+ \mapsto 0, \\ h \mapsto 2(-x^+), \\ x^- \mapsto h, \end{cases} \quad \text{ad}(x^-): \begin{cases} -x^+ \mapsto h, \\ h \mapsto 2x^-, \\ x^- \mapsto 0, \end{cases} \quad \text{ad}(h): \begin{cases} -x^+ \mapsto 2(-x^+), \\ h \mapsto 0, \\ x^- \mapsto -2x^-, \end{cases}$$

を満たす。そこで準同型写像 $\rho_2: \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ を

$$\rho_2(x^+) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(x^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

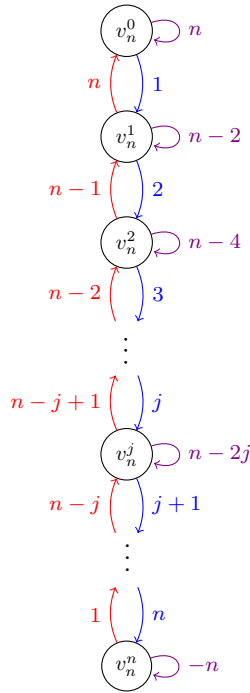


図3 \mathfrak{sl}_2 の既約表現 V_n の構造

1.4 表現の直和と完全可約性

定義 1.20. V と V' をリー代数 \mathfrak{g} の表現とする. ベクトル空間の直和 $V \oplus V'$ は

$$x(v + v') := xv + xv', \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V, v' \in V'$$

によって \mathfrak{g} の表現となる. こうして得られた表現 $V \oplus V'$ を表現 V と表現 V' の**直和**という. 3つ以上の表現の直和も同様に定義する.

定理 1.21 (Weyl の完全可約性定理). \mathfrak{g} を複素有限次元単純リー代数とすると, \mathfrak{g} の任意の有限次元表現は**完全可約**, すなわち (同型と順番を除いて一意に決まる) いくつかの既約表現の直和に同型である.

命題 1.19 と定理 1.21 から次の主張が従う.

系 1.22. \mathfrak{sl}_2 の任意の有限次元既約表現 $V = (V, \rho)$ は

$$V \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n^{\oplus d_n(V)}$$

と既約表現の直和に分解する. 特に $\rho(h)$ は対角化可能である. ここで重複度 $d_n(V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は V の部分ベクトル空間 $\{v \in V \mid hv = nv, x^+v = 0\}$ の次元に一致する.

一般に $hv = nv, x^+v = 0$ なる非零ベクトル v をウェイト n の**最高ウェイトベクトル**という.

1.5 表現のテンソル積とその分解

定義 1.23. V と V' をリー代数 \mathfrak{g} の表現とする. ベクトル空間のテンソル積 $V \otimes V'$ は

$$x(v \otimes v') := (xv) \otimes v' + v \otimes (xv'), \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V, v' \in V'$$

によって \mathfrak{g} の表現となる. こうして得られた表現 $V \otimes V'$ を表現 V と表現 V' の**テンソル積**という. 3つ以上の表現のテンソル積も同様に定義する.

例 1.24. リー代数 \mathfrak{g} の任意の表現 V と 1 次元自明表現 \mathbb{C} に対し, ベクトル空間の自然な同型

$$V \otimes \mathbb{C} \cong V \cong \mathbb{C} \otimes V$$

は \mathfrak{g} 同型写像である.

すなわち自明表現 \mathbb{C} は表現のテンソル積 \otimes に関する**単位対象** (unit object) である. リー代数の表現のなす圏のように, テンソル積と単位対象を備えた圏を一般に**モノイダル圏** (monoidal category) という.

V と V' がともに有限次元ならば $V \otimes V'$ もまた有限次元である. このとき完全可約性定理 1.21 より $V \otimes V'$ は既約表現の直和に分解する.

例 1.25. テンソル積表現 $V_1 \otimes V_1$ を既約表現の直和に分解しよう. 以下簡単のため v_1^j を単に v^j と書く. $V_1 \otimes V_1$ は

$$\{v^0 \otimes v^0, \quad v^0 \otimes v^1, \quad v^1 \otimes v^0, \quad v^1 \otimes v^1\}$$

を基底に持つ 4 次元のベクトル空間である. x^\pm の作用は

$$\begin{aligned} x^+(v^0 \otimes v^0) &= 0, & x^-(v^0 \otimes v^0) &= v^1 \otimes v^0 + v^0 \otimes v^1, \\ x^+(v^1 \otimes v^0 + v^0 \otimes v^1) &= 2v^0 \otimes v^0, & x^-(v^1 \otimes v^0 + v^0 \otimes v^1) &= 2v^1 \otimes v^1, \\ x^+(v^1 \otimes v^1) &= v^0 \otimes v^1 + v^1 \otimes v^0, & x^-(v^1 \otimes v^1) &= 0, \\ x^\pm(v^0 \otimes v^1 - v^1 \otimes v^0) &= 0 \end{aligned}$$

となる. したがって, 例えば線形同型 $V_2 \oplus V_0 \rightarrow V_1 \otimes V_1$ を

$$\varphi(v_2^0) = v^0 \otimes v^0, \quad \varphi(v_2^1) = v^0 \otimes v^1 + v^1 \otimes v^0, \quad \varphi(v_2^2) = v^1 \otimes v^1, \quad \varphi(v_0^0) = v^0 \otimes v^1 - v^1 \otimes v^0$$

と定めれば, φ は \mathfrak{sl}_2 同型写像 $V_2 \oplus V_0 \cong V_1 \otimes V_1$ を与える.

一般の場合は以下のようになる.

命題 1.26 (Clebsch–Gordan 則). 任意の $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, \mathfrak{sl}_2 の表現の同型

$$V_m \otimes V_n \cong \bigoplus_{r=0}^{\min(m,n)} V_{m+n-2r}$$

が存在する. この同型写像は右辺の最高ウェイトベクトル v_{m+n-2r}^0 を左辺の最高ウェイトベクトル

$$w_{m,n}^r := \sum_{i+j=r} (-1)^i \frac{(m-i)!}{m!} \frac{(n-j)!}{n!} v_m^i \otimes v_n^j$$

の \mathbb{C}^\times 倍にうつす.

2 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とその有限次元表現

この節では単純リー代数の「量子化」を与える量子群とその有限次元表現論について、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に説明する。ここで述べられる結果の多くは一般の単純リー代数 \mathfrak{g} で通用する。

大雑把に言えば量子群とは単純リー代数（もしくはリー群）の q 類似を与える代数的構造である。ここで、与えられた数学的対象 X の「 q 類似」とは、連続パラメータ q に依存した何らかの変形であって、特殊化 $q = 1$ において X 自身に戻ってくるようなものを大雑把に指しており、確定した定義はない。先に述べたように単純リー代数はディンキン図形という離散データによって分類されるため、それが単純リー代数であるという条件を保ったまま連続的に変形することはできない。しかし、リー代数 \mathfrak{g} の代わりにその普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を考えれば、意味のある q 類似が得られる。それがここで扱う量子群（量子包絡環） $U_q(\mathfrak{g})$ である。これは今からちょうど 40 年前の 1985 年に Drinfeld と神保によって独立に導入された。

2.1 普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$

前節で見たように、リー代数 \mathfrak{sl}_2 の表現とは関係式 (1.1) を満たす線形写像 $\rho(x^\pm), \rho(h) \in \text{End}(V)$ を備えたベクトル空間 V のことであった。そこで、 x^+, x^-, h という 3 つの生成元を持ち、

$$hx^\pm - x^\pm h = \pm 2x^\pm, \quad x^+x^- - x^-x^+ = h$$

を定義関係式とする \mathbb{C} 代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ を考える。これをリー代数 \mathfrak{sl}_2 の **普遍包絡環** (universal enveloping algebra) という。より具体的には x^+, x^-, h を変数とする非可換多項式環 $\mathbb{C}\langle x^+, x^-, h \rangle$ をとり、定義関係式の (左辺) - (右辺) で生成される両側イデアル $I := \langle hx^\pm - x^\pm h \mp 2x^\pm, x^+x^- - x^-x^+ - h \rangle$ をによる商代数

$$U(\mathfrak{sl}_2) := \mathbb{C}\langle x^+, x^-, h \rangle / I$$

として定義する。定義より、関係式 (1.1) を満たす線形写像の 3 つ組 $\rho(x^+), \rho(x^-), \rho(h) \in \text{End}(V)$ と、 \mathbb{C} 代数の準同型写像 $\rho: U(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}(V)$ とは同じものである。したがって、「リー代数 \mathfrak{sl}_2 の表現」と「普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の左加群」は自然に同一視される。

より一般に、任意のリー代数 \mathfrak{g} に対してその普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ が定義され、「リー代数 \mathfrak{g} の表現」と「普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ 上の左加群」が自然に同一視される。このとき部分表現は部分加群と同じものであり、既約表現は既約加群と同じものである。また \mathfrak{g} の表現の間の \mathfrak{g} 準同型写像は、 $U(\mathfrak{g})$ 加群の間の $U(\mathfrak{g})$ 準同型写像と同じものである。

2.2 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

以下、量子化パラメータ $q \in \mathbb{C}^\times$ を固定する。本講座を通じて q は 1 の冪根でない、すなわち条件

$$\text{任意の整数 } n \in \mathbb{Z} \text{ について } q^n \neq 1$$

を満たすと仮定する。この仮定は本質的で、これがないと例えば下記の命題 2.6 などは成り立たない。

定義 2.1. リー代数 \mathfrak{sl}_2 に付随する量子群（または \mathfrak{sl}_2 の量子包絡環） $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を

- 生成元: X^+, X^-, K, K^{-1} ;

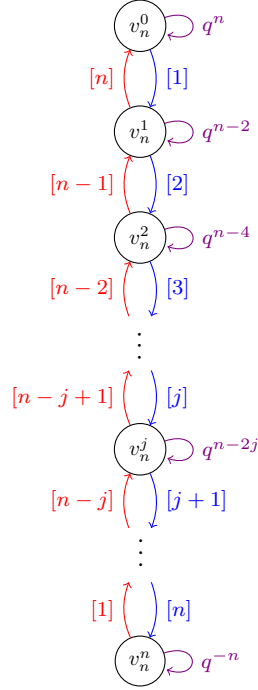


図4 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の既約表現 V_n の構造

によって定まる. 言い換えると, $\{v_n^j \mid 0 \leq j \leq n\}$ を $V_n = \mathbb{C}^{n+1}$ の標準的な基底として,

$$X^+ v_n^j = [n-j+1]v_n^{j-1}, \quad X^- v_n^j = [j+1]v_n^{j+1}, \quad K^{\pm 1} v_n^j = q^{\pm(n-2j)} v_n^j$$

ただし $v_n^{-1} = v_n^{n+1} = 0$, とすれば V_n に $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現の構造が入る. この表現 V_n は既約である.

既約表現 V_n の構造は図 2.3 のように表せる.

定義 2.3. 一般に \mathbb{C} 代数 A から \mathbb{C} 代数 B への準同型写像 $\psi: A \rightarrow B$ が与えられたとき, B の表現 $V = (V, \rho)$ から A の表現 $\psi^*V = (V, \rho \circ \psi)$ を作ることができる. ψ^*V を ψ による表現 V の引き戻し (pullback) という. もし $\psi: A \rightarrow B$ が全射なら, B の既約表現 V の引き戻し ψ^*V は A の既約表現になる.

例 2.4. 例えば $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は

$$\sigma(X^\pm) = \pm X^\pm, \quad \sigma(K^{\pm 1}) = -K^{\pm 1}$$

で与えられる \mathbb{C} 代数の自己同型写像 $\sigma: U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2)$ をもつ. このとき任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 既約表現 V_n の σ による引き戻し σ^*V_n はまた既約表現である. これは

$$X^+ v_n^j = [n-j+1]v_n^{j-1}, \quad X^- v_n^j = -[j+1]v_n^{j+1}, \quad K^{\pm 1} v_n^j = -q^{\pm(n-2j)} v_n^j$$

満たし, 特に $V_n \not\cong \sigma^*V_n$ である.

命題 2.5 ([5, §3]). $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の任意の $n+1$ 次元既約表現は V_n または σ^*V_n に同型である.

命題 2.6 (完全可約性 [5, §4]). $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の任意の有限次元表現は (同型と順番を除いて一意に決まる) いくつかの既約表現の直和に同型である.

定義 2.7. 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現 $V = (V, \rho)$ について, $\rho(K)$ が対角化可能でその固有値が q の整数冪であるとき, V は**タイプ 1 表現**であるという.

例えば V_n はタイプ 1 表現であるが, $\sigma^* V_n$ はそうでない. 以下簡単のためタイプ 1 表現のみを考える.

系 2.8. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の任意の有限次元タイプ 1 表現 $V = (V, \rho)$ は

$$V \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n^{\oplus d_n(V)}$$

と既約表現の直和に分解する. ここで $d_n(V) = \dim\{v \in V \mid Kv = q^n v, X^+v = 0\}$.

一般に, $Kv = q^n v, X^+v = 0$ なる非零ベクトル v をウェイト n の**最高ウェイトベクトル**という.

2.4 余積と表現のテンソル積

この節では量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現のテンソル積について説明する. 見通しを良くするために, まず一般の \mathbb{C} 代数の表現のテンソル積について考察しておく.

\mathbb{C} 代数 U に対して, そのテンソル積 $U \otimes U$ をテンソル成分ごとの積を考えることによって \mathbb{C} 代数とみなす. すなわち $x \otimes y, x' \otimes y' \in U \otimes U$ に対して, $(x \otimes y)(x' \otimes y') := xx' \otimes yy'$ とする. U の表現 $V = (V, \rho), V' = (V', \rho')$ に対し, $U \otimes U$ の表現 $(V \otimes V', \rho \otimes \rho')$ が自然に定まる. ここで $(\rho \otimes \rho')(x \otimes y) := \rho(x) \otimes \rho'(y)$ である. これを V と V' の**外部テンソル積**といい, $V \boxtimes V'$ と書く.

もし \mathbb{C} 代数の準同型写像

$$\Delta: U \rightarrow U \otimes U$$

があれば, $U \otimes U$ の表現 $V \boxtimes V'$ を Δ で引き戻す (定義 2.3) ことによって U の表現 $\Delta^*(V \boxtimes V')$ を得る. そのような準同型写像 $\Delta: U \rightarrow U \otimes U$ は, 積 (product) 写像 $U \otimes U \rightarrow U; (x, y) \mapsto xy$ と逆方向であるから, 「積写像の双対」という意味で U の**余積** (coproduct) と呼ばれる. U に余積 Δ が与えられた, U の表現 V, V' に対して記号 $V \otimes V'$ は $\Delta^*(V \boxtimes V')$ を意味するものとする. すなわち

$$V \otimes V' := \Delta^*(V \boxtimes V') = (V \otimes V', (\rho \otimes \rho') \circ \Delta)$$

と定義する. もし余積 Δ が**余結合律** (coassociativity) を満たす, すなわち図式

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Delta} & U \otimes U \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes \text{id}_U \\ U \otimes U & \xrightarrow{\text{id}_U \otimes \Delta} & U \otimes U \otimes U \end{array}$$

を可換にするならば, U の表現 V, V', V'' に対してベクトル空間の自然な同型

$$(V \otimes V') \otimes V'' \cong V \otimes (V' \otimes V'')$$

は U 同型写像を与える. この場合両者を同一視して単に $V \otimes V' \otimes V''$ と書く. さらに余積 Δ が**余単位律** を満たす, すなわち \mathbb{C} 代数の準同型写像 $\epsilon: U \rightarrow \mathbb{C}$ であって図式

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Delta} & U \otimes U \\ \Delta \downarrow & \searrow \text{id}_U & \downarrow \epsilon \otimes \text{id}_U \\ U \otimes U & \xrightarrow{\text{id}_U \otimes \epsilon} & U \end{array}$$

を可換にするものが存在するとする. このような ϵ を余単位射と呼ぶ. このとき $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, \epsilon)$ は U の 1 次元表現であり, 任意の表現 V に対してベクトル空間の自然な同型

$$V \otimes \mathbb{C} \cong V \cong \mathbb{C} \otimes V$$

は U 同型写像になる. すなわち \mathbb{C} はテンソル積 \otimes に関する単位対象となる. \mathbb{C} を U の **自明表現** と呼ぶ.

このように \mathbb{C} 代数 U に余結合律と余単位律を満たす余積 Δ が与えられているとき, U は **双代数** (bialgebra) であるという. 上で見たことは, 双代数 U の表現全体がテンソル積 \otimes に関してモノイダル圏をなすことを意味している. 自明表現 \mathbb{C} がその単位対象である.

例 2.9. 任意のリー代数 \mathfrak{g} の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ は双代数の構造をもつ. 余積 Δ は任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\Delta(x) := x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad (2.1)$$

によって与えられ, 余単位射は 1 次元自明表現の構造射 $\rho_0: U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C} = \text{End}(\mathbb{C})$, すなわち $\rho_0(x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$ によって与えられる. リー代数の表現のテンソル積の定義 1.23 はこの余積 Δ の定義に対応している.

次の命題が示す通り, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の双代数としての q 類似である.

命題 2.10. 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は, 式

$$\Delta(X^+) := X^+ \otimes 1 + K \otimes X^+, \quad \Delta(X^-) := X^- \otimes K^{-1} + 1 \otimes X^-, \quad \Delta(K^{\pm 1}) := K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1} \quad (2.2)$$

によって定まる準同型写像 $\Delta: U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を余積, 1 次元表現 V_0 の構造射 $\rho_0: U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \mathbb{C} = \text{End}(V_0)$ を余単位射として双代数となる.

Proof. Δ が \mathbb{C} 代数の準同型として well-defined であることをチェックする. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は生成元と関係式で定義されていたので, Δ が各定義関係式を保つことを示せば良い. 例えば

$$\begin{aligned} & \Delta(X^+) \Delta(X^-) - \Delta(X^-) \Delta(X^+) \\ &= (X^+ \otimes 1 + K \otimes X^+) (X^- \otimes K^{-1} + 1 \otimes X^-) - (X^- \otimes K^{-1} + 1 \otimes X^-) (X^+ \otimes 1 + K \otimes X^+) \\ &= (X^+ X^- \otimes K^{-1} + X^+ \otimes X^- + K X^- \otimes X^+ K^{-1} + K \otimes X^+ X^-) \\ &\quad - (X^- X^+ \otimes K^{-1} + X^- K \otimes K^{-1} X^+ + X^+ \otimes X^- + K \otimes X^- X^+) \\ &= (X^+ X^- - X^- X^+) \otimes K^{-1} + K \otimes (X^+ X^- - X^- X^+) \\ &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \otimes K^{-1} + K \otimes \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} = \frac{K \otimes K - K^{-1} \otimes K^{-1}}{q - q^{-1}} = \frac{\Delta(K) - \Delta(K^{-1})}{q - q^{-1}} \end{aligned}$$

といった具合である. 余結合律と余単位律が満たされることも直接確認できる. \square

注意 2.11. 量子包絡環の余積 Δ の定義 (2.2) には複数の流儀があり, 本質的な差はないのだが, 文献によって異なるので注意が必要である. 今回は [5] と同じ流儀を採用した.

命題 2.10 により, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のタイプ 1 表現のなす圏はモノイダル圏となる. 2 つの表現 V, V' に対しそのテンソル積 $V \otimes V'$ への $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 作用を具体的に書くと, 任意の $v \in V, v' \in V'$ に対して

$$\begin{aligned} X^+(v \otimes v') &:= X^+ v \otimes v' + K v \otimes X^+ v', \\ X^-(v \otimes v') &:= X^- v \otimes K^{-1} v' + v \otimes X^- v' \\ K^{\pm 1}(v \otimes v') &:= K^{\pm 1} v \otimes K^{\pm 1} v' \end{aligned}$$

となる.

例 2.12. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のテンソル積表現 $V_1 \otimes V_1$ における X^\pm の作用を定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned} X^+(v^0 \otimes v^0) &= 0, & X^-(v^0 \otimes v^0) &= q^{-1}v^1 \otimes v^0 + v^0 \otimes v^1, \\ X^+(q^{-1}v^1 \otimes v^0 + v^0 \otimes v^1) &= [2]v^0 \otimes v^0, & X^-(q^{-1}v^1 \otimes v^0 + v^0 \otimes v^1) &= [2]v^1 \otimes v^1, \\ X^+(v^1 \otimes v^1) &= v^0 \otimes v^1 + q^{-1}v^1 \otimes v^0, & X^-(v^1 \otimes v^1) &= 0, \\ X^\pm(v^0 \otimes v^1 - qv^1 \otimes v^0) &= 0. \end{aligned}$$

などが分かる. したがって, 例えば線形同型 $V_2 \oplus V_0 \rightarrow V_1 \otimes V_1$ を

$$\varphi(v_2^0) = v^0 \otimes v^0, \quad \varphi(v_2^1) = v^0 \otimes v^1 + q^{-1}v^1 \otimes v^0, \quad \varphi(v_2^2) = v^1 \otimes v^1, \quad \varphi(v_0^0) = v^0 \otimes v^1 - qv^1 \otimes v^0$$

と定めれば, φ は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 同型写像を与える.

リー代数 \mathfrak{sl}_2 のときと同様に次の Clebsch–Gordan 則が成り立つ.

命題 2.13 (Clebsch–Gordan 則). 任意の $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現の同型

$$V_m \otimes V_n \simeq \bigoplus_{r=0}^{\min(m,n)} V_{m+n-2r}$$

が存在する. このとき同型写像は右辺の最高ウェイトベクトル v_{m+n-2r}^0 を左辺の最高ウェイトベクトル

$$w_{m,n}^r := \sum_{i+j=r} (-q^{m-i+1})^i \frac{[m-i]!}{[m]!} \frac{[n-j]!}{[n]!} v_m^i \otimes v_n^j \quad (2.3)$$

の \mathbb{C}^\times 倍に写す. ただし $[m]! := [m][m-1] \cdots [2][1]$ などとする (階乗の q 類似).

注意 2.14. 実際には普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ および量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は双代数より強くホップ代数の構造を持つ. これは任意の有限次元表現からその双対表現を作ることができる構造であり, 有限次元表現のなす圏にリジットなモノイダル圏構造を与える. 本講座ではこの部分の説明を割愛する. 詳細は [5] を参照.

2.5 R 行列とヤン・バクスター方程式

これまで見てきたように, q が 1 の冪根でない限り量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現論はリー代数 \mathfrak{sl}_2 の有限次元表現論とはほぼ平行であり, 特に大きな差はないように思われる. しかし表現のなすモノイダル圏の構造を比較すると, 両者には本質的な違いがある.

普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の余積 (2.1) はテンソル成分の入れ替えに関して不変であり, その意味で余可換 (cocommutative) である. これは表現で言うと, 任意の表現 V, V' について, テンソル成分の入れ替え

$$r_{V,V'}: V \otimes V' \xrightarrow{\cong} V' \otimes V; \quad v \otimes v' \mapsto v' \otimes v$$

が $U(\mathfrak{g})$ 同型写像を与えることを意味する. このとき $r_{V',V}^{-1} = r_{V,V'}$ が成り立つが, このようなモノイダル圏は一般に**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ばれる.

一方で式 (2.2) から分かるように, 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余積 Δ はテンソル成分の入れ替えについて不変でない. その意味で $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は余可換双代数 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の**非余可換変形**を与える. ゆえに $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の一般の表現 V, V' について, テンソル成分の単純な入れ替えは $V \otimes V'$ と $V' \otimes V$ の間の $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 同型を与えない. 実際, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現のなす圏は対称モノイダル圏にはならない.

しかし系 2.8 と命題 2.13 によれば, 有限次元タイプ 1 表現 V, V' に対し, $V \otimes V'$ と $V' \otimes V$ は同じ既約分解を持つ. よって抽象的には同型 $V \otimes V' \cong V' \otimes V$ が存在する. 局所的にはそのような同型写像の取り方にはいろいろな可能性がある.

例 2.15. 例えば, 任意の $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して命題 2.13 により $V_m \otimes V_n \cong \bigoplus_{r=0}^{\min(m,n)} V_{m+n-r} \cong V_n \otimes V_m$ である. 任意の $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 準同型写像 $V_m \otimes V_n \rightarrow V_n \otimes V_m$ は左辺の最高ウェイトベクトル $w_{m,n}^r$, $0 \leq r \leq \min(m,n)$ の行き先で決まり, それは右辺の最高ウェイトベクトル $w_{n,m}^r$ の任意の \mathbb{C} 倍にとれる. 言い換えれば, 各 $0 \leq r \leq \min(m,n)$ に対し $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 準同型写像 $\psi_{m,n}^r \in \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_m \otimes V_n, V_n \otimes V_m)$ を $\psi_{m,n}^r(w_{m,n}^r) = \delta_{r,r'} w_{n,m}^r$ によって定まるものとすれば, $\{\psi_{m,n}^r \mid 0 \leq r \leq \min(m,n)\}$ はベクトル空間 $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_m \otimes V_n, V_n \otimes V_m)$ の基底を与える. このとき, 次が成り立つ:

$$\{U_q(\mathfrak{sl}_2) \text{ 同型写像 } V_m \otimes V_n \xrightarrow{\cong} V_n \otimes V_m\} = \{\sum_{r=0}^{\min(m,n)} c_r \psi_{m,n}^r \mid c_r \in \mathbb{C}^\times, 0 \leq r \leq \min(m,n)\}. \quad (2.4)$$

ここでは詳しく述べないが, Drinfeld は**普遍 R 行列** (universal R -matrix) なるものを用いて, 有限次元タイプ 1 表現の各順序対 (V, V') に対し $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 同型写像

$$R_{V,V'}: V \otimes V' \xrightarrow{\cong} V' \otimes V$$

を適切に構成すれば, 任意の V, V', V'' に対し図式

$$\begin{array}{ccccc} & & V' \otimes V \otimes V'' & \xrightarrow{\text{id}_{V'} \otimes R_{V,V''}} & V' \otimes V'' \otimes V \\ & \nearrow R_{V,V'} \otimes \text{id}_{V''} & & & \searrow R_{V',V''} \otimes \text{id}_V \\ V \otimes V' \otimes V'' & & & & & V'' \otimes V' \otimes V \\ & \searrow \text{id}_V \otimes R_{V',V''} & & & \nearrow \text{id}_{V''} \otimes R_{V,V'} \\ & & V \otimes V'' \otimes V' & \xrightarrow{R_{V,V''} \otimes \text{id}_{V'}} & V'' \otimes V \otimes V' \end{array}$$

が可換になることを示した. この図式の可換性を表す等式

$$\begin{aligned} & (R_{V',V''} \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_{V'} \otimes R_{V,V''}) \circ (R_{V,V'} \otimes \text{id}_{V''}) \\ &= (\text{id}_{V''} \otimes R_{V,V'}) \circ (R_{V,V''} \otimes \text{id}_{V'}) \circ (\text{id}_V \otimes R_{V',V''}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

は **Yang-Baxter 方程式** と呼ばれる. 大雑把に言って, このような同型写像の族 $\{R_{V,V'}\}$ を備えたモノイダル圏は**組紐的モノイダル圏** (braided monoidal category) と呼ばれる. これは対称モノイダル圏の一般化であり, 一般には $R_{V,V'}^{-1} \neq R_{V',V}$ である. 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現のなす圏は組紐的モノイダル圏の重要な例であり, 結び目の量子不変量の構成など興味深い応用を持つ. 量子群と結び目の不変量の関係についての入門書として [7] を挙げておく.

3 アフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ とその有限次元表現

この節ではリー代数 \mathfrak{sl}_2 の「アフィン化」について説明する. ここで単純リー代数 \mathfrak{g} の「アフィン化」とは, アフィン・リー代数と呼ばれる無限次元リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のことを指す. これは 1960 年代に Kac と Moody によって独立に導入された単純リー代数の一般化 (Kac-Moody リー代数と呼ばれる) の最も重要な例であり, 2 次元共形場理論やソリトン方程式の理論などに応用を持つ. アフィン・リー代数も量子群と同様, リー代数 \mathfrak{g} に

新たにパラメータを加えて変形したものと言えるのだが、変形の仕方は全く異なる。アフィン・リー代数にはループ代数の中心拡大としての表示と、有限個の生成元と関係式による Kac–Moody 型表示の 2 つの表示があり、どちらも重要である。ここでは前者を定義として出発する。

3.1 定義

t を変数とするローラン多項式環 $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ を考える。ベクトル空間 $L\mathfrak{sl}_2 := \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ は、リー括弧

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n}, \quad x, y \in \mathfrak{sl}_2, m, n \in \mathbb{Z}$$

によってリー代数となる。これを \mathfrak{sl}_2 のループ代数という。

注意 3.1. ループとは普通閉じた曲線のことを指すので、ループ代数といえば単位円 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ から \mathfrak{sl}_2 への写像全体の成すリー代数の方がより自然に思い浮かぶが、ここではその複素代数幾何学的対応物を考えている。すなわち、ここでは S^1 の代わりにその複素化である $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を考え、 \mathbb{C}^\times から \mathfrak{sl}_2 への代数的写像全体のなすリー代数としてループ代数 $L\mathfrak{sl}_2$ を定義している。

アフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ はループ代数 $L\mathfrak{sl}_2$ の 1 次元中心拡大である。具体的には $L\mathfrak{sl}_2$ に 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}c$ を直和したベクトル空間

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_2 := L\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}c$$

を考え、新たにリー括弧を

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n} + m\delta_{m+n,0} \text{Tr}(xy)c, \quad [c, x \otimes t^m] = 0$$

(ただし、 $x, y \in \mathfrak{sl}_2, m, n \in \mathbb{Z}$) と定めて定義する。ここで $\delta_{m+n,0}$ はクロネッカーのデルタ記号であって、 $m+n=0$ のとき 1、そうでないとき 0 に値を取る。 $\text{Tr}(xy)$ は 2 次正方行列の積 xy のトレースを表す。

元 c は中心的、すなわち $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のすべての元と可換（リー括弧が自明）である。自然な射影 $\pi: \widehat{\mathfrak{sl}}_2 \rightarrow L\mathfrak{sl}_2$ はリー代数の準同型写像であり、 $\text{Ker } \pi = \mathbb{C}c$ である。言い換えれば、リー代数の（分裂しない）短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}c \longrightarrow \widehat{\mathfrak{sl}}_2 \xrightarrow{\pi} L\mathfrak{sl}_2 \longrightarrow 0$$

がある。これが「 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ は $L\mathfrak{sl}_2$ の 1 次元中心拡大」の内容である。

注意 3.2. 変数 t に関するオイラー作用素 $d = t \frac{d}{dt}$ を含めてアフィン・リー代数を $\widehat{\mathfrak{g}} = L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ と定義することも多いが、今回は d を含めない。 d を含めてしまうと後述の代入表現が定義できなくなる。

3.2 Kac–Moody 型表示

アフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ は

$$\{x^+ \otimes t^n, x^- \otimes t^n, h \otimes t^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$$

を基底に持つ無限次元ベクトル空間であるが、リー代数としては 6 つの元

$$\begin{aligned} x_1^+ &:= x^+ \otimes 1, & x_1^- &:= x^- \otimes 1, & h_1 &:= h \otimes 1, \\ x_0^+ &:= x^+ \otimes t, & x_0^- &:= x^- \otimes t^{-1}, & h_0 &:= -h \otimes 1 + c, \end{aligned}$$

だけから生成される。実際, $[x_1^\pm, x_0^\pm] = \pm h \otimes t^{\pm 1}$ であるから, 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 例えば

$$\begin{aligned} x^\pm \otimes t^n &= (\text{ad}[x_1^+, x_0^+])^n(x_1^\pm)/(\pm 2)^n, & h \otimes t^n &= \text{ad}(x_1^+)(\text{ad}[x_1^+, x_0^+])^n(x_1^-)/(-2)^n, \\ x^\pm \otimes t^{-n} &= (\text{ad}[x_1^-, x_0^-])^n(x_1^\pm)/(\mp 2)^n, & h \otimes t^{-n} &= \text{ad}(x_1^+)(\text{ad}[x_1^-, x_0^-])^n(x_1^-)/2^n, \end{aligned}$$

と書ける。また, 上記 6 つの元は任意の $i, j \in \{0, 1\}$ について以下の関係式を満たすことが容易に分かる:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, x_j^\pm] = \mp(-1)^{\delta_{ij}} 2x_j^\pm, \quad [x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i, \quad \text{ad}(x_i^\pm)^3(x_{1-i}^\pm) = 0. \quad (3.1)$$

特に各 $i \in \{0, 1\}$ に対して

$$\mathfrak{s}_i := \mathbb{C}x_i^+ + \mathbb{C}x_i^- + \mathbb{C}h_i$$

は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の部分リー代数であり, リー代数として $\mathfrak{s}_i \cong \mathfrak{sl}_2$ である。

実は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ におけるすべての関係式は (3.1) から導かれる。より強く, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ はリー代数として生成元 $\{x_i^+, x_i^-, h_i\}_{i \in \{0,1\}}$ と関係式 (3.1) による表示を持つことが知られている。詳しくは [6, §4]などを参照されたい。これはしばしば *Kac-Moody 型表示* と呼ばれる。これを普遍包絡環の言葉に翻訳すると次のようになる。

定理 3.3 ($U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の Kac-Moody 型表示). 普遍包絡環 $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は

- 生成元: x_i^+, x_i^-, h_i ($i \in \{0, 1\}$);
- 関係式: 任意の $i, j \in \{0, 1\}$ について

$$\begin{aligned} h_i h_j &= h_j h_i, & h_i x_j^\pm - x_j^\pm h_i &= \mp(-1)^{\delta_{ij}} 2x_j^\pm, & x_i^+ x_j^- - x_j^- x_i^+ &= \delta_{ij} h_i, \\ (x_i^\pm)^3 x_{1-i}^\pm - 3(x_i^\pm)^2 x_{1-i}^\pm x_i^\pm + 3x_i^\pm x_{1-i}^\pm (x_i^\pm)^2 - x_{1-i}^\pm (x_i^\pm)^3 &= 0, \end{aligned}$$

によって定義される \mathbb{C} 代数に同型である。

この事実は後でアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ を $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の q 類似として定義する際の出発点となる。(定義 4.1 を参照。)

3.3 表現のレベル

定義 3.4. $k \in \mathbb{C}$ とする。アフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現 V は中心元 c の作用がスカラー k 倍である (つまり任意の $v \in V$ について $cv = kv$ である) とき, **レベル k** であるという。

例えば $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の任意の既約表現 (有限次元とは限らない) において c はスカラー倍で作用する (これは Schur の補題の可算無限次元版である Dixmier-Schur の補題より従う)。よって既約表現はある $k \in \mathbb{C}$ についてレベル k である。

以下では $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の有限次元表現のみを考える。次の事実が基本的である。

命題 3.5. $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の任意の有限次元表現はレベル 0 であり, したがって $L\mathfrak{sl}_2$ の表現とみなせる。

Proof. $V = (V, \rho)$ を $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の有限次元表現, $d = \dim V > 0$ とする。まず V が既約であると仮定すると, シューアの補題によりある $k \in \mathbb{C}$ について $\rho(c) = k \text{id}_V$ である。よって $\text{Tr}(\rho(c)) = kd$ である。一方, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の定義関係式より $c = \frac{1}{2}[h \otimes t, h \otimes t^{-1}]$ であるから, $\text{Tr}(\rho(c)) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\rho(h \otimes t), \rho(h \otimes t^{-1})] = 0$ である (交換子のトレースは常に 0 であることに注意)。したがって, $k = 0$ でなくてはならない。ゆえに有限次元既約表現はレ

ベル 0 であることが示された。 V が既約とは限らない一般の有限次元表現の場合は、組成列を考えることにより、 $\rho(c)$ の固有値がすべて 0 であることが分かる。 また $c = h_0 + h_1$ であり、 $\rho(h_0)$ と $\rho(h_1)$ はともに対角化可能 (V を \mathfrak{sl}_2 の有限次元表現とみて系 1.22 を適用) で $[\rho(h_0), \rho(h_1)] = \rho([h_0, h_1]) = 0$ だから、 $\rho(c) = \rho(h_0) + \rho(h_1)$ もまた対角化可能である。 したがって $\rho(c) = 0$ であり、 V はレベル 0 である。 \square

3.4 代入表現

定義 3.6. 非零複素数 $a \in \mathbb{C}^\times$ に対し、リー代数の準同型 $\text{ev}_a: \widehat{\mathfrak{sl}}_2 \rightarrow \mathfrak{sl}_2$ を

$$\text{ev}_a(x \otimes t^n) := a^n x, \quad \text{ev}_a(c) := 0$$

(ただし $x \in \mathfrak{sl}_2, n \in \mathbb{Z}$) によって定義する。 \mathfrak{sl}_2 の表現 $V = (V, \rho)$ を ev_a で引き戻すことによって、 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現 $V(a) := (V, \rho \circ \text{ev}_a)$ を得る。 言い換えれば、 $V(a)$ はベクトル空間 V に

$$(x \otimes t^n)v := a^n xv, \quad cv := 0,$$

によって $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 作用を定めた表現である。 このような表現 $V(a)$ を**代入表現** (evaluation representation) という。

構成から代入表現はレベル 0 である。 また ev_a は全射なので、 V が既約ならば $V(a)$ も既約である。 特に任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $V_n(a)$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の有限次元既約表現である。 自明表現 V_0 については $V_0(a)$ も再び自明表現となりパラメータ a に依存しない。 一方 $n > 0$ のときは、例えば最高ウェイトベクトル v_n^0 への $h \otimes t^n$ の作用の仕方を比べれば、 $a \neq b$ のとき $V_n(a)$ と $V_n(b)$ は互いに同型でないことが分かる。 したがって $\{V_n(a) \mid n > 0, a \in \mathbb{C}^\times\}$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の互いに同型でない有限次元既約表現の無限族を与える。

3.5 代入表現のテンソル積

\mathfrak{sl}_2 の 2 つの表現 V, W と $a \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$V(a) \otimes W(a) = (V \otimes W)(a) \tag{3.2}$$

が成り立つ。 これは $x \in \mathfrak{sl}_2, t \in \mathbb{Z}, v \in V(a), w \in W(b)$ に対して、定義より

$$(x \otimes t^n)(v \otimes w) = (a^n xv) \otimes w + v \otimes (a^n xw) = a^n(xv \otimes w + v \otimes xw) = a^n x(v \otimes w)$$

となることから分かる。 これは普遍包絡環の余積 Δ を使えば、

$$(\text{ev}_a \otimes \text{ev}_a) \circ \Delta = \Delta \circ \text{ev}_a \tag{3.3}$$

を満たすこと、すなわち ev_a が双代数の準同型写像 $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow U(\mathfrak{sl}_2)$ を導くことを意味する。

一方 $a \neq b$ のとき、 $V(a) \otimes W(b)$ はより興味深い表現となる。

例 3.7. $V_1(a) \otimes V_1(b)$ への $x_0^\pm = x^\mp \otimes t^{\pm 1} \in \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の作用は以下のように計算される：

$$\begin{aligned} x_0^+(v^0 \otimes v^0) &= av^1 \otimes v^0 + bv^0 \otimes v^1, & x_0^-(v^0 \otimes v^0) &= 0, \\ x_0^+(v^0 \otimes v^1) &= av^1 \otimes v^1, & x_0^-(v^0 \otimes v^1) &= b^{-1}v^0 \otimes v^0, \\ x_0^+(v^1 \otimes v^0) &= bv^1 \otimes v^1, & x_0^-(v^1 \otimes v^0) &= a^{-1}v^0 \otimes v^0, \\ x_0^+(v^1 \otimes v^1) &= 0, & x_0^-(v^1 \otimes v^1) &= a^{-1}v^0 \otimes v^1 + b^{-1}v^1 \otimes v^0. \end{aligned}$$

$a \neq b$ のとき $V_1(a) \otimes V_1(b)$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の既約表現である. 実際 $\{0\}$ でない部分表現 W あれば, これは $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{sl}_2 \otimes 1 \subset \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の部分表現でもあるから, 2 つの最高ウェイトベクトル $w^0 = v^0 \otimes v^0$ と $w^1 = v^0 \otimes v^1 - v^1 \otimes v^0$ のうち少なくとも一方を含む. しかし, 上の計算により

$$w^0 = \frac{abx_0^-}{a-b}w^1, \quad w^1 = \frac{(ax_1^- - x_0^+) - (x_0^+ - bx_1^-)}{a-b}w^0$$

であるから, いずれにせよ W は w^0, w^1 を両方含まねばならない. したがって $W = V_1(a) \otimes V_1(b)$ となり, $V_1(a) \otimes V_1(b)$ の既約性が従う.

この現象を一般化した次の主張が成り立つ. 証明は実質的に Vandermonde 行列式の応用である.

命題 3.8. 自然数 n_1, n_2, \dots, n_d と非零複素数 a_1, a_2, \dots, a_d に対し, 有限次元既約代入表現のテンソル積

$$V_{n_1}(a_1) \otimes V_{n_2}(a_2) \otimes \cdots \otimes V_{n_d}(a_d) \quad (3.4)$$

が $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の既約表現であるための必要十分条件は a_1, \dots, a_d が互いに相異なることである.

Proof. 条件の必要性は (3.2) と Clebsch–Gordan 則 (命題 1.26) よりすぐに分かる.

十分性, すなわち a_1, \dots, a_d が互いに相異なると仮定して (3.4) が $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現として既約であることを示す. 次の補題が要となる. これは Vandermonde 行列式の簡単な応用である.

補題 3.9. f をベクトル空間 V の自己線形写像とし, $v_1, \dots, v_d \in V$ を f の固有ベクトル, $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ をそれらの固有値とする. つまり各 $1 \leq i \leq d$ について $f(v_i) = a_i v_i$ であるとする. もし固有値 a_1, \dots, a_d が互いに相異なるならば, $v := v_1 + \cdots + v_d$ として次が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^d \mathbb{C}v_i = \sum_{i=1}^d \mathbb{C}f^{i-1}(v).$$

Proof. 固有値が相異なることから $\{v_1, \dots, v_d\}$ は線形独立である. 一方

$$f^{i-1}(v) = a_1^{i-1}v_1 + a_2^{i-1}v_2 + \cdots + a_d^{i-1}v_d$$

である. そこで

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{d-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_d & a_d^2 & \cdots & a_d^{d-1} \end{pmatrix}$$

とおくと, a_1, \dots, a_d が互いに相異なることから

$$\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (a_j - a_i) \neq 0$$

となる. したがって A の逆行列が存在し, それを $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ と書けば, 各固有ベクトル v_i は $v_i = \sum_{j=1}^d b_{ji} f^{j-1}(v)$ と $\{v, f(v), \dots, f^{d-1}(v)\}$ の線形結合で書ける. \square

命題 3.8 の十分性の証明に戻ろう. 2 つ準備を行う.

[準備 1] まずテンソル積 (3.4) の標準的な基底 $\{v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d} \mid 0 \leq i_k \leq n_k, 1 \leq k \leq d\}$ に関して元 $h \otimes t^m$, $m \in \mathbb{Z}$ の作用は対角的で,

$$(h \otimes t^m)(v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d}) = \sum_{k=1}^d a_k^m (n_k - 2i_k) v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d} \quad (3.5)$$

が成り立つことに注意する. a_1, \dots, a_d が互いに相異なることから, ヴァンデルモンド行列 $(a_k^{m-1})_{1 \leq m, k \leq d}$ は逆行列を持つ. すなわち, d 次正方行列 $(b_{l,m})_{1 \leq l, m \leq d}$ であって $\sum_{m=1}^d b_{l,m} a_k^{m-1} = \delta_{l,k}$ を満たすものがとれる. 複素数 $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ を条件

$$\sum_{k=1}^d j_k c_k \neq 0, \quad \text{if } (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \text{ and } |j_k| \leq 2n_k \text{ for all } 1 \leq k \leq d \quad (3.6)$$

を満たすように十分一般にとり, $H := \sum_{l,m=1}^d c_l b_{l,m} h \otimes t^{m-1} \in \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ とおく. (3.5) より

$$\begin{aligned} H(v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d}) &= \sum_{k,l,m=1}^d c_l b_{l,m} a_k^{m-1} (n_k - 2i_k) v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d} \\ &= \left(\sum_{k=1}^d c_k (n_k - 2i_k) \right) v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d}. \end{aligned}$$

ゆえに基底 $\{v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d} \mid 0 \leq i_k \leq n_k, 1 \leq k \leq d\}$ の各元は H の作用に関する固有ベクトルであり, 条件 (3.6) よりその固有値は互いに相異なる.

[準備 2] 各 $1 \leq l \leq d$ に対し多項式 $f_l(t) \in \mathbb{C}[t]$ を

$$f_l(t) := \prod_{1 \leq k \leq d, k \neq l} \frac{t - a_k}{a_l - a_k}$$

と定義すれば $f_l(a_k) = \delta_{l,k}$ を満たす. このとき $x^\pm \otimes f_l(t) \in \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のテンソル積 (3.4) への作用は

$$\begin{aligned} (x^\pm \otimes f_l(t))(v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d}) &= \sum_{k=1}^d f_l(a_k) v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^\pm v_{n_k}^{i_k} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d} \\ &= v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^\pm v_{n_l}^{i_l} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d} \end{aligned}$$

となり, l 番目のテンソル因子のみを x^\pm で動かすことが分かる. 以上で準備を終わる.

さて, W を (3.4) の $\{0\}$ でない部分表現とする. W の任意の非零ベクトル w と [準備 1] で構成した H の作用について補題 3.9 を適用すれば, 基底のある元 $v_{n_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{j_d}$ が W に属することが分かる. この元を [準備 2] で構成した $x^\pm \otimes f_l(t) \in \widehat{\mathfrak{sl}}_2$, $1 \leq l \leq d$ の作用で動かすことによって基底 $\{v_{n_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_d}^{i_d} \mid 0 \leq i_k \leq n_k, 1 \leq k \leq d\}$ のすべての元が W に属することが分かる. したがって W は全体と一致し, テンソル積 (3.4) の既約性が従う. これで命題 3.8 の証明を終わる. \square

さらに次の事実が知られている (アフィン量子群についての後述の定理 4.16 の $q = 1$ 版).

定理 3.10. $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の任意の有限次元既約表現は, (3.4) の形の代入表現のテンソル積 (これはテンソル因子の順序の入れ替えを除いて一意に決まる) に同型である.

3.6 完全可約でない表現の例

単純リー代数 \mathfrak{sl}_2 やその量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現とは対照的に、 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の有限次元表現は一般に完全可約とは限らない。完全可約でない表現の例は以下のように簡単に作るができる。

リー代数 \mathfrak{sl}_2 の表現 V と $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ 加群 M に対し、テンソル積 $V \otimes M$ に $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の作用を

$$(x \otimes t^n)(v \otimes m) := (xv) \otimes (t^n m), \quad c(v \otimes m) := 0$$

(ただし、 $x \in \mathfrak{sl}_2, n \in \mathbb{Z}, v \in V, m \in M$) と定めることで、 $V \otimes M$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル 0 表現となる。非零複素数 $a \in \mathbb{C}^\times$ に対し自然な同型 $V(a) \cong V \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]/(t-a)$ がある。したがって $V \otimes M$ は代入表現の構成を一般化したものであると言える。 V と M がともに有限次元であれば $V \otimes M$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の有限次元表現であるが、 V が自明表現もしくは M が $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ 加群として単純加群の直和に分解しない限り $V \otimes M$ も完全可約でない。例えば、非零複素数 $a \in \mathbb{C}^\times$ に対し $V_1 \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]/(t-a)^2$ という 4 次元表現は

$$0 \longrightarrow V_1(a) \longrightarrow V_1 \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]/(t-a)^2 \longrightarrow V_1(a) \longrightarrow 0$$

という短完全列に収まるが、この短完全列は分裂しない、すなわち $V_1 \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]/(t-a)^2 \not\cong V_1(a) \oplus V_1(a)$ である。このことは $h \otimes t$ の作用のジョルダン標準形が

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

であり、対角化できないことから分かる。

4 アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ とその有限次元表現

さていよいよ真打ちアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の登場である。これは単純リー代数 \mathfrak{g} の「量子化+アフィン化」とみなせるような対象であって、もともと統計物理における格子模型や量子可積分系の文脈で導入された。ここでは $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に限定してその有限次元表現について論じる。これまで見てきたように、「量子化」によって表現のテンソル積の対称性が失われ、「アフィン化」によって表現の完全可約性が失われたが、アフィン量子群の表現論においてはその両方が同時に失われ、それゆえに一層複雑で面白い現象を生じる。ここでは具体例の計算を通じてそうした複雑さ・面白さに触れてみたい。特筆すべきなのはアフィン量子群の有限次元表現のなすモノイダル圏はテンソル積に関して非可換、すなわち

$$V \otimes V' \not\cong V' \otimes V$$

なる表現 V, V' が存在することである。これはリー代数 $\mathfrak{sl}_2, \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ や量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現には見られなかった性質である。

この節の内容は主に神保先生の教科書 [5] および Chari と Pressley による論文 [1] に基づく。最後の小節では、既約表現の極大可換族と多面体の三角形分割との対応について述べる。これは近年活発に研究されている「団代数のモノイダル圏化」の雛形である。

4.1 アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

前と同様に、量子化パラメータ q は 1 の冪根でないと仮定する。アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は普遍包絡環 $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の Kac–Moody 型表示 (定理 3.3) の q 類似として次のように定義される。

定義 4.1. リー代数 \mathfrak{sl}_2 に付随するアフィン量子群 (または量子アフィン代数) $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ を

- 生成元: $X_i^+, X_i^-, K_i, K_i^{-1}$ ($i \in \{0, 1\}$),
- 関係式: 任意の $i, j \in \{0, 1\}$ について

$$\begin{aligned} K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, & K_i K_j &= K_j K_i, \\ K_i X_j^\pm K_i^{-1} &= q^{\mp(-1)^{\delta_{ij}2}} X_j^\pm, & X_i^+ X_j^- - X_j^- X_i^+ &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ (X_i^\pm)^3 X_{1-i}^\pm - [3](X_i^\pm)^2 X_{1-i}^\pm X_i^\pm + [3]X_i^\pm X_{1-i}^\pm (X_i^\pm)^2 - X_{1-i}^\pm (X_i^\pm)^3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

によって定義される \mathbb{C} 代数とする。

アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は非余可換な双代数 (実際にはより強くホップ代数) の構造を持つ。

命題 4.2. アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は、式

$$\Delta(X_i^+) := X_i^+ \otimes 1 + K_i \otimes X_i^+, \quad \Delta(X_i^-) := X_i^- \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes X_i^-, \quad \Delta(K_i^{\pm 1}) := K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}$$

によって定まる \mathbb{C} 代数の準同型写像 $\Delta: U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \otimes U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ を余積、式

$$\epsilon(X_i^\pm) = 0, \quad \epsilon(K_i^{\pm 1}) = 1$$

で定まる \mathbb{C} 代数の準同型写像 $\epsilon: U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow \mathbb{C}$ を余単位射として双代数となる。

定義 4.3. アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現 $V = (V, \rho)$ について、 $\rho(K_0), \rho(K_1)$ がともに対角化可能でその固有値が q の整数冪であるとき、 V は**タイプ 1 表現**であるという。

簡単のため、以下ではタイプ 1 表現のみを考察する。タイプ 1 表現はテンソル積に関して閉じているので、その全体はモノイダル圏をなす。

定義関係式 (4.1) から元 $K_0 K_1$ はすべての生成元と可換、すなわち $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の中心元である。これはアフィン・リー代数の中心元 $c = h_0 + h_1$ に対応する元である (実際、形式的に $K_i = q^{h_i}$ と思えば $K_0 K_1 = q^c$)。 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ を $K_0 K_1 - 1$ の生成する両側イデアル $\langle K_0 K_1 - 1 \rangle$ で割って得られる \mathbb{C} 代数

$$U_q(L\mathfrak{sl}_2) := U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) / \langle K_0 K_1 - 1 \rangle$$

を**ループ量子群** (または**量子ループ代数**) と呼ぶ。ループ量子群 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ はアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ から双代数の構造を引き継ぐ。定義よりループ量子群 $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の表現とアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ のレベル 0 表現 (元 $K_0 K_1$ の作用が恒等写像であるような表現) は同一視される。命題 3.5 の類似として次が成立する。

命題 4.4. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の任意の有限次元タイプ 1 表現はレベル 0 である。したがって $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ の表現とみなせる。

注意 4.5. $i \in \{0, 1\}$ を固定したとき, 定義より双代数の準同型写像 $\iota_i: U_q(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ で

$$\iota_i(X^\pm) = X_i^\pm, \quad \iota_i(K^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1}$$

を満たすものが存在する. これらは包含写像 $\mathfrak{sl}_2 \cong \mathfrak{s}_i \subset \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ に対応し, 実際単射である. 以下の議論では $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現を $\iota_1(U_q(\mathfrak{sl}_2))$ に制限して (つまり ι_1 で引き戻すことで) $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現とみなすことが多い.

4.2 代入表現

命題 4.6 (神保). 各 $a \in \mathbb{C}^\times$ に対し, 対応

$$X_1^\pm \mapsto X^\pm, \quad K_1^{\pm 1} \mapsto K^{\pm 1}, \quad X_0^\pm \mapsto a^{\pm 1} X^\mp, \quad K_0^{\pm 1} \mapsto K^{\mp 1} \quad (4.2)$$

は \mathbb{C} 代数の準同型写像 $\text{ev}_a: U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を定める.

Proof. 対応 (4.2) と $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の定義関係式との整合性をチェックする. 例えば関係式

$$(X_1^+)^3 X_0^+ - [3](X_1^+)^2 X_0^+ X_1^+ + [3]X_1^+ X_0^+ (X_1^+)^2 - X_0^+ (X_1^+)^3 = 0$$

の左辺を対応 (4.2) で $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ に送ると

$$a(X^+)^3 X^- - a[3](X^+)^2 X^- X^+ + a[3]X^+ X^- (X^+)^2 - aX^- (X^+)^3$$

であるから,

$$[(X^+)^3, X^-] = [3]X^+[X^+, X^-]X^+$$

を示す必要がある. ここで $[A, B] := AB - BA$ は交換子である. これは以下の計算で確かめられる:

$$\begin{aligned} [(X^+)^3, X^-] &= [X^+, X^-](X^+)^2 + X^+[X^+, X^-]X^+ + (X^+)^2[X^+, X^-] \\ &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}(X^+)^2 + X^+ \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}X^+ + (X^+)^2 \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \\ &= (q^2 + 1 + q^{-2})X^+ \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}X^+ \\ &= [3]X^+[X^+, X^-]X^+. \end{aligned}$$

その他の関係式についても同様. □

定義 4.7. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現 V に対し, V の ev_a による引き戻しを $V(a) := \text{ev}_a^* V$ と書く. このような $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現を**代入表現**と呼ぶ.

注意 4.8. 構成から代入表現 $V(a)$ はレベル 0 表現であり, V がタイプ 1 表現ならば $V(a)$ もそうである. また定義より $\text{ev}_a \circ \iota_1 = \text{id}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}$ であるから, $\iota_1^*(V(a)) = V$ である.

4.3 代入表現のテンソル積

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元タイプ 1 表現 V, W と複素数 $a, b \in \mathbb{C}^\times$ に対して, 代入表現のテンソル積 $V(a) \otimes W(b)$ を考えよう. アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の生成元 X_i^\pm, K_i の作用は以下で与えられる (ただし $v \in V, w \in W$):

$$\begin{aligned} X_1^+(v \otimes w) &= X^+(v \otimes w) = X^+v \otimes w + Kv \otimes X^+w, \\ X_1^-(v \otimes w) &= X^-(v \otimes w) = X^-v \otimes K^{-1}w + v \otimes X^-w, \\ X_0^+(v \otimes w) &= aX^-v \otimes w + bK^{-1}v \otimes X^-w, \\ X_0^-(v \otimes w) &= a^{-1}X^+v \otimes Kw + b^{-1}v \otimes X^+w, \\ K_1(v \otimes w) &= K(v \otimes w) = Kv \otimes Kw, \\ K_0(v \otimes w) &= K^{-1}(v \otimes w) = K^{-1}v \otimes K^{-1}w. \end{aligned}$$

注意 4.9. リー代数の場合には ev_a は双代数の準同型写像 $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow U(\mathfrak{sl}_2)$ を導いたが, 量子群の場合には $\text{ev}_a: U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は余積と整合的ではない (等式 (3.3) は量子群では成立しない) ことに注意が必要である. 実際, $V(a) \otimes W(a)$ の一般のベクトル $v \otimes w$ について

$$\begin{aligned} X_0^+(v \otimes w) &= aX^-v \otimes w + aK^{-1}v \otimes X^-w \neq aX^-v \otimes K^{-1}w + av \otimes X^-w = aX^-(v \otimes w), \\ X_0^-(v \otimes w) &= a^{-1}X^+v \otimes Kw + a^{-1}v \otimes X^+w \neq a^{-1}X^+v \otimes w + a^{-1}Kv \otimes X^+w = a^{-1}X^+(v \otimes w) \end{aligned}$$

である. したがって (3.2) は量子群では成り立たず, 一般に $V(a) \otimes W(a) \not\cong (V \otimes W)(a)$ である. このあたりの事情がアフィン量子群の表現論をより難しく, そして面白くしている.

例 4.10. V と W をともに $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の 2 次元既約表現 V_1 として, $V_1(a) \otimes V_1(b)$ を詳しく調べてみよう. X_1^\pm, K_1 の作用は $X^\pm, K \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の $V_1 \otimes V_1$ への作用と同じであり, それは例 2.12 で計算した. 特に $\iota_1(U_q(\mathfrak{sl}_2)) \cong U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現として $V_1 \otimes V_1 \cong V_2 \oplus V_0$ であり, より具体的には

$$V_2 \cong \mathbb{C}(v^0 \otimes v^0) \oplus \mathbb{C}(v^0 \otimes v^1 + q^{-1}v^1 \otimes v^0) \oplus \mathbb{C}(v^1 \otimes v^1), \quad V_0 \cong \mathbb{C}(v^0 \otimes v^1 - qv^1 \otimes v^0)$$

であった. ここで $w^0 := v^0 \otimes v^0$ と $w^1 := v^0 \otimes v^1 - qv^1 \otimes v^0$ が最高ウェイトベクトルである. 一方 X_0^\pm の $V_1(a) \otimes V_1(b)$ への作用は以下のように計算される:

$$\begin{aligned} X_0^+(v^0 \otimes v^0) &= av^1 \otimes v^0 + bq^{-1}v^0 \otimes v^1, & X_0^-(v^0 \otimes v^0) &= 0, \\ X_0^+(v^0 \otimes v^1) &= av^1 \otimes v^1, & X_0^-(v^0 \otimes v^1) &= b^{-1}v^0 \otimes v^0, \\ X_0^+(v^1 \otimes v^0) &= bqv^1 \otimes v^1, & X_0^-(v^1 \otimes v^0) &= a^{-1}qv^0 \otimes v^0, \\ X_0^+(v^1 \otimes v^1) &= 0, & X_0^-(v^1 \otimes v^1) &= a^{-1}q^{-1}v^0 \otimes v^1 + b^{-1}v^1 \otimes v^0. \end{aligned}$$

主張 1. $b/a \notin \{q^2, q^{-2}\}$ のとき, $V_1(a) \otimes V_1(b)$ は既約であり, しかも $V_1(b) \otimes V_1(a)$ に同型である.

Proof. 証明は例 3.7 のときと同様である. $W \subset V_1(a) \otimes V_1(b)$ を $\{0\}$ でない部分表現とする. W を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 表現 $V_1 \otimes V_1$ の部分表現とみなせば, 最高ウェイトベクトル w^0 または w^1 の少なくとも一方を含まねばならない. しかし仮定 $b/a \notin \{q^2, q^{-2}\}$ の下では

$$w^0 = \frac{abX_0^-}{a - bq^2}w^1, \quad w^1 = \frac{(aX_1^- - q^{-1}X_0^+) - (qX_0^+ - bX_1^-)}{a - bq^{-2}}w^0$$

となるので、いずれにせよ W は w^0 と w^1 をともに含まなければならない。ゆえに $W = V_1(a) \otimes V_1(b)$ であり、 $V_1(a) \otimes V_1(b)$ の既約性が従う。対称性から $V_1(b) \otimes V_1(a)$ も既約である。このとき

$$\begin{aligned}\varphi(v^0 \otimes v^0) &= v^0 \otimes v^0, & \varphi(v^0 \otimes v^1) &= \frac{a(1-q^2)}{b-aq^2}v^0 \otimes v^1 + \frac{q(b-a)}{b-aq^2}v^1 \otimes v^0, \\ \varphi(v^1 \otimes v^0) &= \frac{q(b-a)}{b-aq^2}v^0 \otimes v^1 + \frac{b(1-q^2)}{b-aq^2}v^1 \otimes v^0, & \varphi(v^1 \otimes v^1) &= v^1 \otimes v^1\end{aligned}$$

とおけば、 φ が $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 同型写像 $V_1(a) \otimes V_1(b) \xrightarrow{\cong} V_1(b) \otimes V_1(a)$ であることが直接チェックできる。 \square

主張 2. $b = aq^2$ のとき、次の分裂しない短完全列がある：

$$0 \longrightarrow V_2(aq) \longrightarrow V_1(a) \otimes V_1(aq^2) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0. \quad (4.3)$$

Proof. 上の計算で $b = aq^2$ とすると

$$\begin{aligned}X_0^+(v^0 \otimes v^0) &= aq(v^0 \otimes v^1 + q^{-1}v^1 \otimes v^0), & X_0^+(v^0 \otimes v^1 + q^{-1}v^1 \otimes v^0) &= aq[2]v^1 \otimes v^1, \\ X_0^-(v^1 \otimes v^1) &= (aq)^{-1}(v^0 \otimes v^1 + q^{-1}v^1 \otimes v^0), & X_0^-(v^0 \otimes v^1 + q^{-1}v^1 \otimes v^0) &= (aq)^{-1}[2]v^0 \otimes v^0\end{aligned}$$

が分かる。したがって部分空間 $\mathbb{C}(v^0 \otimes v^0) \oplus \mathbb{C}(v^0 \otimes v^1 + q^{-1}v^1 \otimes v^0) \oplus \mathbb{C}(v^1 \otimes v^1)$ は部分表現であって $V_2(aq^2)$ と同型である。これにより短完全列 (4.3) を得る。 $a(q^{-2} - q^2)^{-1}X_0^+w^1 = w^0$ であるから、分裂単射 $\mathbb{C} \rightarrow V_1(a) \otimes V_1(aq^2)$ は存在しない。 \square

主張 3. $a = bq^2$ のとき、次の分裂しない短完全列がある：

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow V_1(bq^2) \otimes V_1(b) \longrightarrow V_2(bq) \longrightarrow 0. \quad (4.4)$$

Proof. 上の計算で $a = bq^2$ とすると $X_0^\pm w^1 = 0$ が分かるので、部分空間 $\mathbb{C}w^1$ は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の自明表現 \mathbb{C} に同型な $V_1(bq^2) \otimes V_1(b)$ の部分表現である。 $\mathbb{C}w^1$ を法として $v^0 \otimes v^1 \equiv qv^1 \otimes v^0$ であるから

$$\begin{aligned}X_0^+(v^0 \otimes v^0) &= bq^2v^1 \otimes v^0 + bq^{-1}v^0 \otimes v^1 \equiv bq[2]v^1 \otimes v^0, & X_0^+([2]v^1 \otimes v^0) &= bq[2]v^1 \otimes v^1, \\ X_0^-(v^1 \otimes v^1) &= b^{-1}q^{-3}v^0 \otimes v^1 + b^{-1}v^1 \otimes v^0 \equiv (bq)^{-1}[2]v^1 \otimes v^0, & X_0^-([2]v^1 \otimes v^0) &= (bq)^{-1}[2]v^0 \otimes v^0\end{aligned}$$

がわかる。したがって商 $(V_1(bq^2) \otimes V_1(b))/\mathbb{C}w^1$ は $V_2(bq)$ に同型であり、短完全列 (4.4) を得る。

$$\frac{(q^{-1}X_0^+ - bq^2X_1^-) - (qX_0^+ - bX_1^-)}{b(q^2 - q^{-2})}w^0 = w^1$$

であるから、分裂単射 $V_2(bq) \rightarrow V_1(bq^2) \otimes V_1(b)$ は存在しない。 \square

主張 2 と主張 3 を合わせると、任意の $a \in \mathbb{C}^\times$ について

$$V_1(a) \otimes V_1(aq^2) \not\cong V_1(aq^2) \otimes V_1(a)$$

であること、すなわち $V_1(a)$ と $V_1(aq^2)$ はテンソル積に関して非可換があることが分かる。また主張 2 と主張 3 は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の一般の有限次元表現については完全可約性が成り立たないことも示している。

一般の場合について述べるため、次の組合せ論的概念を導入する。

定義 4.11 ([1]).

(1) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $a \in \mathbb{C}^\times$ に対し, \mathbb{C}^\times の部分集合 $S_n(a)$ を

$$S_n(a) := \{aq^{n+1-2r} \mid r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n\} = \{aq^{n-1}, aq^{n-3}, \dots, aq^{-n+3}, aq^{-n+1}\}$$

と定める. \mathbb{C}^\times の空でない有限部分集合 S は, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $a \in \mathbb{C}^\times$ によって $S = S_n(a)$ と表せるとき, q スtring であるという. (このとき a, n は S からただ一つに決まる.)

(2) 2つの q スtring S_1 と S_2 は「合併 $S_1 \cup S_2$ が q スtring でない」または「一方が他方を含む ($S_1 \subset S_2$ または $S_1 \supset S_2$ である)」を満たすとき, 一般の位置にあるという. そうでないとき S_1 と S_2 は特殊な位置にあるという.

例 4.12. 4つの q スtring

$$\begin{aligned} S_1 &= \{q^2, q^4, q^6\} = S_3(q^4), & S_2 &= \{q^4, q^6, q^8, q^{10}\} = S_4(q^7), \\ S_3 &= \{q^6, q^8\} = S_2(q^7), & S_4 &= \{q^{12}, q^{14}\} = S_2(q^{13}) \end{aligned}$$

について:

- S_1 と S_4 , S_2 と S_3 , S_3 と S_4 はそれぞれ一般の位置にある.
- S_1 と S_2 , S_1 と S_3 , S_2 と S_4 はそれぞれ特殊な位置にある.

$$\begin{array}{ccccccc} q^2 & \xrightarrow{S_1} & q^4 & \xrightarrow{\quad} & q^6 & & \\ & & & & & & \\ & & q^4 & \xrightarrow{S_2} & q^6 & \xrightarrow{\quad} & q^8 & \xrightarrow{\quad} & q^{10} \\ & & & & & & & & \\ & & & & q^6 & \xrightarrow{S_3} & q^8 & & & & q^{12} & \xrightarrow{S_4} & q^{14} \end{array}$$

注意 4.13.

- $b/a \notin q^{m+n+2\mathbb{Z}}$ のとき, 任意の $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について $S_m(a)$ と $S_n(b)$ は一般の位置にある.
- $S_1(a) = \{a\}$, $S_1(b) = \{b\}$ であるから, $S_1(a)$ と $S_1(b)$ が互いに一般の位置にあることは $b/a \notin \{q^2, q^{-2}\}$ であることと同値である.

次の補題は容易に証明できる.

補題 4.14. $a, b \in \mathbb{C}^\times$ と $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し q スtring $S_m(a)$ と $S_n(b)$ が一般の位置にあるための必要十分条件は

$$b/a \notin \{q^{m+n-2r+2}, q^{-(m+n-2r+2)} \mid r \in \mathbb{Z}, 0 < r \leq \min(m, n)\}$$

を満たすことである.

次の定理が代入表現のテンソル積の既約性の判定条件である. これは命題 3.8 の q 類似であるが, 条件はより複雑になっている.

定理 4.15 (Chari–Pressley [1]). 自然数 n_1, n_2, \dots, n_d と非零複素数 a_1, a_2, \dots, a_d に対し, 有限次元既約代入表現のテンソル積

$$V_{n_1}(a_1) \otimes V_{n_2}(a_2) \otimes \cdots \otimes V_{n_d}(a_d) \tag{4.5}$$

が $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の既約表現であるための必要十分条件は対応する q スtring $S_{n_1}(a_1), \dots, S_{n_d}(a_d)$ のどの 2 つも一般の位置にあることである。さらにこの条件が満たされるとき, (4.5) は同型を除いてテンソル因子の順番に依らない。

さらに次の事実が知られている。

定理 4.16 ([1]). $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の任意の有限次元既約タイプ 1 表現は, (4.5) の形の代入表現のテンソル積 (これはテンソル因子の順序の入れ替えを除いて一意的に決まる) に同型である。

4.4 テンソル積の可換性と R 行列

上記定理 4.15 は特に $S_m(a)$ と $S_n(b)$ が一般の位置にあれば対応する代入表現のテンソル積が可換, すなわち $V_m(a) \otimes V_n(b) \cong V_n(b) \otimes V_m(a)$ であることを主張している。ここではこの主張の逆を示す。

命題 4.17. $a, b \in \mathbb{C}^\times$, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 同型写像

$$\varphi: V_m(a) \otimes V_n(b) \xrightarrow{\cong} V_n(b) \otimes V_m(a)$$

が存在するための必要十分条件は q スtring $S_m(a)$ と $S_n(b)$ が互いに一般の位置にあることである。

Proof. すでに見たように十分性は定理 4.15 の主張に含まれているので, 必要性のみ示す。同型写像 φ が存在すると仮定する。 φ は特に $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 同型写像であるから, 各 $0 \leq r \leq \min(m, n)$ に対して式 (2.3) で定まる最高ウェイトベクトル $w_{m,n}^r \in V_m \otimes V_n$ を最高ウェイトベクトル $w_{n,m}^r \in V_n \otimes V_m$ の \mathbb{C}^\times 倍に写す, すなわち

$$\varphi(w_{m,n}^r) = c_r w_{n,m}^r$$

なる $c_r \in \mathbb{C}^\times$ がある (例 2.15 の式 (2.4) を参照)。 φ は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 同型なので特に X_0^- 作用と可換, ゆえに

$$\varphi(X_0^- w_{m,n}^r) = X_0^- \varphi(w_{m,n}^r) = c_r X_0^- w_{n,m}^r \quad (4.6)$$

が各 $0 < r \leq \min(m, n)$ に対して成立する。 $X_0^- w_{m,n}^r$ を計算しよう。定義式 (2.3) より

$$(1 \otimes X^+) w_{m,n}^r = w_{m,n}^{r-1}$$

が成り立つことに注意する。また最高ウェイト条件 $X^+ w_{m,n}^r = (X^+ \otimes 1 + K \otimes X^+) w_{m,n}^r = 0$ より

$$(X^+ \otimes 1) w_{m,n}^r = -(K \otimes X^+) w_{m,n}^r$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} (X^+ \otimes K) w_{m,n}^r &= q^2 (K^{-1} \otimes 1) (X^+ \otimes 1) (K \otimes K) w_{m,n}^r \\ &= q^{m+n-2r+2} (K^{-1} \otimes 1) (X^+ \otimes 1) w_{m,n}^r \\ &= -q^{m+n-2r+2} (K^{-1} \otimes 1) (K \otimes X^+) w_{m,n}^r \\ &= -q^{m+n-2r+2} (1 \otimes X^+) w_{m,n}^r \\ &= -q^{m+n-2r+2} w_{m,n}^{r-1} \end{aligned}$$

と計算できる。以上を用いて

$$X_0^- w_{m,n}^r = a^{-1} (X^+ \otimes K) w_{m,n}^r + b^{-1} (1 \otimes X^+) w_{m,n}^r = (b^{-1} - a^{-1} q^{m+n-2r+2}) w_{m,n}^{r-1}$$

となる。同様に

$$X_0^- w_{n,m}^r = (a^{-1} - b^{-1}q^{m+n-2r+2})w_{n,m}^r.$$

これらと等式 (4.6) により

$$(b^{-1} - a^{-1}q^{m+n-2r+2})c_{r-1} = (a^{-1} - b^{-1}q^{m+n-2r+2})c_r \quad (4.7)$$

が各 $0 < r \leq \min(m, n)$ について成り立つ。 $c_{r-1}, c_r \in \mathbb{C}^\times$ であるから、この等式は

$$b/a \notin \{q^{m+n-2r+2}, q^{-(m+n-2r+2)}\}$$

を要請する。したがって補題 4.14 より $S_m(a)$ と $S_n(b)$ は互いに一般の位置にある。 \square

証明に出てきた等式 (4.7) は同型写像 φ を \mathbb{C}^\times 倍を除いて決定する。すなわち

$$c_r = c_0 \prod_{k=1}^r \frac{1 - ba^{-1}q^{m+n-2k+2}}{ba^{-1} - q^{m+n-2k+2}}$$

が各 $0 < r \leq \min(m, n)$ に対して成り立つから、例 2.15 の記号を用いて

$$\varphi = c_0 \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \prod_{k=1}^r \frac{1 - ba^{-1}q^{m+n-2k+2}}{ba^{-1} - q^{m+n-2k+2}} \psi_{m,n}^r$$

と決まる。右辺が比 b/a にしか依らないことに注意しよう。そこで z をパラメータとして

$$R_{V_m, V_n}(z) := \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \prod_{k=1}^r \frac{1 - zq^{m+n-2k+2}}{z - q^{m+n-2k+2}} \psi_{m,n}^r$$

とおく。これは $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_m \otimes V_n, V_n \otimes V_m)$ に値を取る z の有理関数とすることができる。 $R_{V_m, V_n}(z)$ を V_m と V_n の間の (正規化された) R 行列と呼ぶ。この R 行列はパラメータ付き Yang–Baxter 方程式

$$\begin{aligned} (R_{V_m, V_n}(z) \otimes \text{id}_{V_l}) \circ (\text{id}_{V_m} \otimes R_{V_l, V_n}(zw)) \circ (R_{V_l, V_m}(w) \otimes \text{id}_{V_n}) \\ = (\text{id}_{V_n} \otimes R_{V_l, V_m}(w)) \circ (R_{V_l, V_n}(zw) \otimes \text{id}_{V_m}) \circ (\text{id}_{V_l} \otimes R_{V_m, V_n}(z)) \end{aligned}$$

を満たす。この主張は、一般の $a, b, c \in \mathbb{C}^\times$ に対してテンソル積 $V_l(a) \otimes V_m(b) \otimes V_n(c)$ と $V_n(c) \otimes V_m(b) \otimes V_l(a)$ が既約であること (定理 4.15) と、「既約表現の間の同型写像は定数倍を除いてただ一つしかない」という表現論における基本的な事実 (Schur の補題) から自動的に従う。

注意 4.18. $R_{V_m, V_n}(z)$ を $z = 0$ にて特殊化したものを R_{V_m, V_n}^0 と書くと、これは $V_m \otimes V_n$ から $V_n \otimes V_m$ への $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 同型写像であって、(パラメータなしの) Yang–Baxter 方程式 (2.5) の解を与える。この R_{V_m, V_n}^0 は 2.5 節で触れた、 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の普遍 R 行列から構成される組紐作用素 R_{V_m, V_n} とは定数倍の関係にある。

$V_m(a)$ と $V_n(b)$ がテンソル積に関して可換でない (すなわち $S_m(a)$ と $S_n(b)$ が一般の位置にない) ときも、 R 行列 $R_{V_m, V_n}(z)$ を用いて、0 でない $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 準同型写像

$$\mathbf{r}_{V_m(a), V_n(b)}: V_m(a) \otimes V_n(b) \rightarrow V_n(b) \otimes V_m(a)$$

を以下のようにして構成することができる：

- (1) ある $0 < r \leq \min(m, n)$ について $b/a = q^{-(m+n-r+2)}$ であるとき、有理関数 $R_{V_m, V_n}(z)$ は $z = b/a$ で正則であるから $z = b/a$ で特殊化できて $\mathbf{r}_{V_m(a), V_n(b)} := R_{V_m, V_n}(z)|_{z=b/a}$ と定義する。

(2) ある $0 < r \leq \min(m, n)$ について $b/a = q^{m+n-r+2}$ であるとき, 有理関数 $R_{V_m, V_n}(z)$ は $z = b/a$ で 1 位の極を持つ. 分母を払ってから特殊化して $\mathbf{r}_{V_m(a), V_n(b)} := ((z - b/a)R_{V_m, V_n}(z))|_{z=b/a}$ と定義する.

定理 4.19 ([1]). ある $0 < r \leq \min(m, n)$ について $b/a = q^{m+n-r+2}$ とすると,

$$K_1 := \text{Ker}(\mathbf{r}_{V_m(a), V_n(b)}) = \text{Im}(\mathbf{r}_{V_n(b), V_m(a)}) \cong V_{r-1}(q^{m-r+1}a) \otimes V_{m+n-r+1}(q^{-(m-r+1)}b),$$

$$K_2 := \text{Ker}(\mathbf{r}_{V_n(b), V_m(a)}) = \text{Im}(\mathbf{r}_{V_m(a), V_n(b)}) \cong V_{m-r}(q^{-r}a) \otimes V_{n-r}(q^r b)$$

が成り立ち, これらは既約である. さらに 2 つの短完全列

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow V_m(a) \otimes V_n(b) \longrightarrow K_2 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow V_n(b) \otimes V_m(a) \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$$

は分裂しない.

定理 4.19 の 2 つの短完全列は例 2.12 の短完全列 (4.3), (4.4) の一般化である.

4.5 モノイダル団構造

最後に, これまでに見てきた代入表現のテンソル積の性質が, 凸多角形の三角形分割の組合せ論を用いることでよりわかりやすく記述できることを説明しよう.

以下, 自然数 ℓ を固定して有限集合

$$\{q^2, q^4, \dots, q^{2\ell}\}$$

に含まれる q スtringのみを考える.

簡単のため q スtring $S = S_m(a)$ に対し $V(S) := V_m(a)$ とする. また空集合 \emptyset に対しては $V(\emptyset) := \mathbb{C}$ (自明表現) とする.

$$\mathcal{V}_\ell := \{V(S) \mid S \text{ は } \{q^2, q^4, \dots, q^{2\ell}\} \text{ に含まれる } q \text{ スtring}\}$$

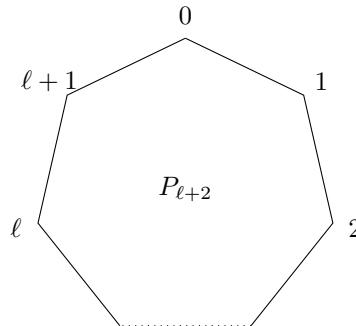
とおく. \mathcal{V}_ℓ の部分集合 \mathcal{M} で条件「 $V, V' \in \mathcal{M}$ ならば $V \otimes V' \cong V' \otimes V$ である」を満たすものを可換族と呼び, 可換族のうち包含関係に関して極大なものを**モノイダル団** (monoidal cluster) と呼ぶことにする.

不等式 $0 \leq i < j \leq \ell + 1$ を満たす整数の組 (i, j) に対し, 部分集合 $S_{i,j} \subset \{q^2, q^4, \dots, q^{2\ell}\}$ を

$$S_{i,j} := \{q^{2k} \mid i < k < j\}$$

と定める. $S_{i,j}$ は $j = i + 1$ のとき空集合であり, そうでなければ q スtring である. 逆に $\{q^2, q^4, \dots, q^{2\ell}\}$ に含まれる q スtring はすべて $S_{i,j}$ ($j > i + 1$) の形である.

さて, 平面上に凸 $(\ell + 2)$ 角形 $P_{\ell+2}$ を考え, その頂点を時計回りに $0, 1, 2, \dots, \ell + 1$ とラベルする.



頂点 i と頂点 j (ただし $i < j$) を結ぶ線分を $[i, j]$ と書くことにすると, $P_{\ell+2}$ の対角線 $[i, j]$ と q スtring $S_{i,j}$ であって $S_{0,\ell+1}$ とは異なるものが 1:1 対応する. さらに次の 2 条件は互いに同値である:

- q スtring $S_{i,j}$ と $S_{i',j'}$ が一般の位置にある.
- 線分 $[i, j]$ と $[i', j']$ は $P_{\ell+2}$ の内部で交わらない.

凸 $(\ell + 2)$ 角形 $P_{\ell+2}$ の三角形分割 T とは $P_{\ell+2}$ の内部で互いに交わらない $\ell - 1$ 本の対角線の集合のことである. 三角形分割は文字通り $P_{\ell+2}$ を ℓ 個の三角形に分割する. よく知られているように $P_{\ell+2}$ の三角形分割の個数は ℓ 番目のカタラン数 $C_\ell = \frac{1}{\ell+1} \binom{2\ell}{\ell}$ に等しい. 以上の考察と命題 4.17 より次が分かる. ここで $V(S_{0,\ell+1})$ は任意の $V(S_{i,j})$ と可換であることに注意.

命題 4.20. 凸 $(\ell + 2)$ 角形 $P_{\ell+2}$ の任意の三角形分割 T に対し, モノイダル団

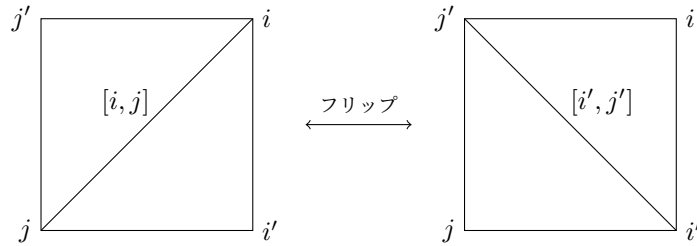
$$\mathcal{M}_T := \{V(S_{i,j}) \mid [i, j] \in T\} \cup \{V(S_{0,\ell+1})\}$$

が定まる. 対応 $T \mapsto \mathcal{M}_T$ は $P_{\ell+2}$ の三角形分割と \mathcal{V}_ℓ のモノイダル団の間の 1:1 対応を与える. 特に \mathcal{V}_ℓ の任意のモノイダル団は ℓ 個の代入表現からなり, また \mathcal{V}_ℓ のモノイダル団の数はカタラン数 C_ℓ に等しい.

2 つのモノイダル団 \mathcal{M} と \mathcal{M}' は $|\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'| = \ell - 1$ であるとき隣接しているということにする. このとき $V(S_{i,j}) \in \mathcal{M}$ と $V(S_{i',j'}) \in \mathcal{M}'$ を

$$\mathcal{M} \setminus \{V(S_{i,j})\} = \mathcal{M}' \setminus \{V(S_{i',j'})\}$$

を満たすものとする, $V(S_{i,j})$ と $V(S_{i',j'})$ は可換でない. したがって対応する対角線 $[i, j]$ と $[i', j']$ は $P_{\ell+2}$ の内部で交わる. このとき $i < i' < j < j'$ または $i' < i < j' < j$ であるが, 前者であると仮定して一般性を失わない. $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ に対応する $P_{\ell+2}$ の三角形分割をそれぞれ T, T' (つまり $\mathcal{M}_T = \mathcal{M}, \mathcal{M}_{T'} = \mathcal{M}'$) とすると, T' は T から対角線 $[i, j]$ を四角形 $[i, i', j, j']$ においてフリップすることで得られる.



このとき四角形 $[i, i', j, j']$ を用いてテンソル積 $V(S_{i,j}) \otimes V(S_{i',j'})$ の構造を記述することができる. 次の命題は定理 4.19 から従う.

命題 4.21. $0 \leq i < i' < j < j' \leq \ell + 1$ のとき, 次の 2 つの分裂しない短完全列がある:

$$0 \longrightarrow V(S_{i,j'}) \otimes V(S_{i',j}) \longrightarrow V(S_{i,j}) \otimes V(S_{i',j'}) \longrightarrow V(S_{i,i'}) \otimes V(S_{j,j'}) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow V(S_{i,i'}) \otimes V(S_{j,j'}) \longrightarrow V(S_{i',j'}) \otimes V(S_{i,j}) \longrightarrow V(S_{i,j'}) \otimes V(S_{i',j}) \longrightarrow 0.$$

ここで $[i, i'], [i', j], [j, j'], [i, j']$ は四角形 $[i, i', j, j']$ の 4 辺であり, これらは $T \cap T'$ に属する. したがって対応する表現 $V(S_{i,i'}), V(S_{i',j}), V(S_{j,j'}), V(S_{i,j'})$ は $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ に属することに注意する. ちなみにここで $\{[i, j'], [i', j]\}$ と $\{[i, i'], [j, j']\}$ は四角形 $[i, i', j, j']$ において互いに向かい合う辺の組になっている. 上の短完全列はそれぞれ $V(S_{i,j}) \otimes V(S_{i',j'})$ と $V(S_{i',j'}) \otimes V(S_{i,j})$ の長さ 2 の組成列を与える.

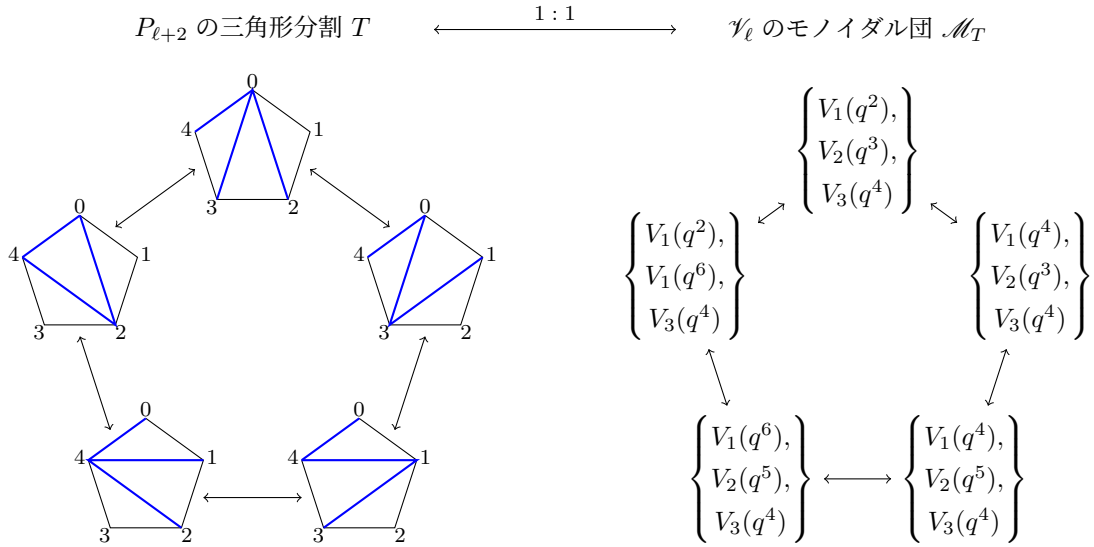


図5 三角形分割とモノイダル圏の対応 ($\ell = 3$)

このようにアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元既約表現のテンソル積構造は、多角形の三角形分割の組合せ論と対応してうまく記述することができる。後者の組合せ論のある種の一般化として**圏代数** (cluster algebra) と呼ばれる概念があるが、上で見たような記述を一般のアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の有限次元表現の場合に拡張しようという試みは**圏代数のモノイダル圏化**と関係しており、近年この方向の研究が大きく進展している。例えば圏代数のモノイダル圏化の概念の提唱者である Hernandez と Leclerc による概説 [3] を参照されたい。また昨年出版された柏原先生と韓国の若手研究者 Kim, Oh, Park による論文 [4] はこの方向の研究のひとつの到達点である。

参考文献

- [1] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 142(2):261–283, 1991.
- [2] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [3] David Hernandez and Bernard Leclerc. Quantum affine algebras and cluster algebras. In *Interactions of quantum affine algebras with cluster algebras, current algebras and categorification—in honor of Vyjayanthi Chari on the occasion of her 60th birthday*, volume 337 of *Progr. Math.*, pages 37–65. Birkhäuser/Springer, Cham, [2021] ©2021. [arXiv:1902.01432](https://arxiv.org/abs/1902.01432).
- [4] Masaki Kashiwara, Myungho Kim, Se-jin Oh, and Euiyong Park. Monoidal categorification and quantum affine algebras II. *Invent. Math.*, 236(2):837–924, 2024. [arXiv:2103.10067](https://arxiv.org/abs/2103.10067).
- [5] 神保道夫. **量子群とヤン・バクスター方程式**. 丸善出版, 2012.
- [6] 谷崎俊之. **リー代数と量子群**. 共立出版, 2002.
- [7] 村上順. **結び目と量子群**. すうがくの風景 3, 朝倉書店, 2000.