京都大学 2025 年度後期 全学共通科目
「対称性の数理」 講義ノート

担当教員：藤田 遼 *

2026 年 3 月 3 日版

■本講義の概要　リー代数（リー環）の表現論について講義を行う．表現論は種々の代数系のベクトル空間への作用を通じて対称性を研究する数学の一分野である．表現論で扱う代数系の中でも特に連続パラメータを持つ対称性であるリー群とその局所的構造を捉えた概念であるリー代数は基本的であり，数学の諸分野のみならず理論物理でも重要である．本講義ではリー群とリー代数およびそれらの表現の概念について簡単に説明したのち，複素リー代数とその表現論の基礎的事項について解説する．

■参考文献について　本講義の主要な参考文献として Humphreys [2] および Fulton–Harris [1] を挙げておく．京都大学の学生はどちらも電子書籍が利用可能だと思う．その他の文献については講義中またはこの講義ノートの中で適宜紹介する．

目次

1 導入 3
- 1.1 対称性と群 3
- 1.2 作用と表現 5
- 1.3 Lie 群とその Lie 代数 8
- 1.4 指数写像 13
- 1.5 準同型の微分 16
- 1.6 Lie 群の表現から複素 Lie 代数の表現へ 20

* 所属：京都大学数理解析研究所，e-mail: rfujita@kurims.kyoto-u.ac.jp

2 $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現論 24
2.1 一般論からの準備 24
2.2 $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現 28
2.3 表現の直和と完全可約性 32
2.4 $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現の分類 33

3 半単純 Lie 代数とその構造 40
3.1 イデアルと半単純 Lie 代数 40
3.2 反傾表現と不変対称双線型形式 42
3.3 Killing 形式と Cartan の判定条件 45
3.4 可換 Lie 代数のウェイト表現 47
3.5 Cartan 部分代数とルート空間分解 51

4 ルート系の性質と分類 59
4.1 ルート系と Weyl 群 59
4.2 結晶条件からの帰結 63
4.3 Weyl の部屋と単純ルート 64
4.4 Dynkin 図形によるルート系の分類 71
4.5 既約ルート系の具体的実現 79
4.6 補足：Weyl 群の元の長さ 84

5 普遍包絡環 87
5.1 $\mathbb{C}$ 代数 87
5.2 Lie 代数の普遍包絡環 92
5.3 Lie 代数の表示 96

6 半単純 Lie 代数の有限次元表現論 98
6.1 三角分解と Serre の定理 98
6.2 最高ウェイト表現 101
6.3 有限次元既約表現の分類 107
6.4 Casimir 元と完全可約性定理 111
6.5 Weyl の指標公式 116

1　導入

1.1　対称性と群

与えられた数学的対象 X に対し，その自己同型全体の成す集合を $\mathrm{Aut}(X)$ と表す[*1]．多くの場合 X は「集合 + 付加構造」という形をしており，この講義ではそのような場合のみを考える．このとき

$$\mathrm{Aut}(X) = \{f\colon X \to X \mid f \text{ は } X \text{ の付加構造と整合的な写像で可逆なもの}\}$$

となる．この集合 $\mathrm{Aut}(X)$ を「X の対称性」と思うことができる．

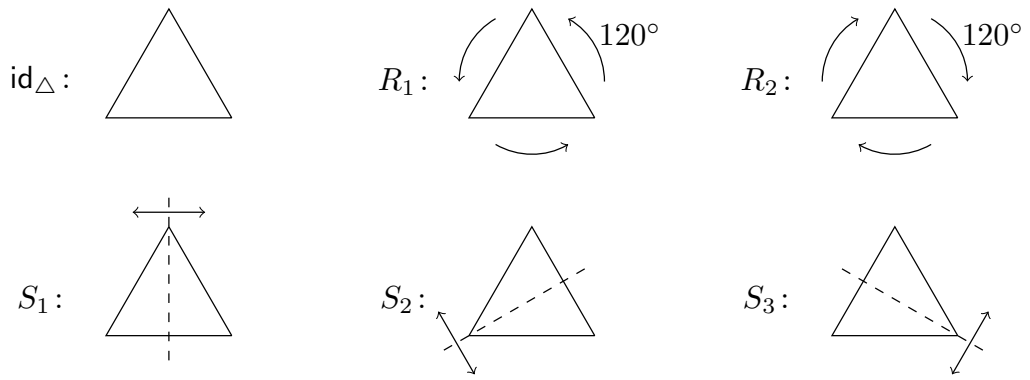
例 1.1 (正三角形の対称性)**.** 例えば X が Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 内の図形であるとき，

$$\mathrm{Aut}(X) = \{f\colon X \to X \mid f \text{ は任意の 2 点間の直線距離を保つ全単射}\}$$

であるとする．例えば X が正三角形 $\triangle \subset \mathbb{R}^2$ である場合を考えよう．

$$\mathrm{Aut}(\triangle) = \{\mathsf{id}_\triangle, R_1, R_2, S_1, S_2, S_3\}$$

である．ただし，$\mathsf{id}_\triangle$ は恒等写像であり，写像 R_1, R_2 および S_1, S_2, S_3 はそれぞれ以下で与えられる回転および鏡映である：



[*1] $\mathrm{Aut}(X)$ を正確に定義するには圏論 (category theory) の用語を使う．上で「数学的対象 X」と言ったとき，正確には X はある圏 (category) $\mathscr{C}$ の対象 (object) であると仮定している．このとき $\mathrm{Aut}(X)$ は，圏 $\mathscr{C}$ に依存するので，正確には $\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(X)$ などと書くべきであり，その定義は

$$\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(X) \coloneqq \{f \in \mathscr{C}(X,X) \mid \exists f' \in \mathscr{C}(X,X) \text{ s.t. } f \circ f' = \mathsf{id}_X = f' \circ f\}$$

である．ここで圏 $\mathscr{C}$ の対象 X, Y に対して，$\mathscr{C}(X,Y)$ は X から Y への射 (morphism) の集合を表し，$\mathsf{id}_X \in \mathscr{C}(X,X)$ は恒等射 (identity) を表す．用語については [5] など圏論の教科書を参照されたい．

集合 $\mathrm{Aut}(X)$ は写像の合成 $(f,g) \mapsto f \circ g$ で閉じている．ここで $x \in X$ に対し，$(f \circ g)(x) \coloneqq f(g(x))$ である．絵で描くと

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}.$$

例 1.2 (例 1.1 の続き)**.** 集合 $\mathrm{Aut}(\triangle)$ において $f \circ g$ を計算すると次表のようになる．このような表は乗算表と呼ばれる．

$f \setminus g$	$\mathsf{id}_\triangle$	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
$\mathsf{id}_\triangle$	$\mathsf{id}_\triangle$	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
R_1	R_1	R_2	$\mathsf{id}_\triangle$	S_3		
R_2	R_2					
S_1	S_1					
S_2	S_2					
S_3	S_3					

レポート問題 1. 上の空欄を埋めて $\mathrm{Aut}(\triangle)$ の乗算表を完成させよ．

定義 1.3 (群)**.** 集合 G に，積と呼ばれる写像 $G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh$ で以下の条件を満たすものが与えられているとき，G は**群** (group) であるという．

(1) 結合律：任意の $g_1, g_2, g_3 \in G$ について $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ が成り立つ．
(2) 単位元の存在：ある元 $e \in G$ が存在して，任意の $g \in G$ について $eg = g = ge$ を満たす．
(3) 逆元の存在：任意の元 $g \in G$ に対し，元 $g^{-1} \in G$ が存在して $gg^{-1} = e = g^{-1}g$ を満たす．

注意 1.4. 単位元は一意的に決まる．実際，元 $e, e' \in G$ が「任意の $g \in G$ について $eg = g = ge'$」を満たすならば，$e = ee' = e'$ である．また各元 $g \in G$ に対してその逆元は一意的に決まる．実際，元 $g', g'' \in G$ が $gg' = e = g''g$ を満たすならば，

$$g' = eg' = (g''g)g' = g''(gg') = g''e = g''.$$

命題 1.5. $\mathrm{Aut}(X)$ は写像の合成を積とする群である．$\mathrm{Aut}(X)$ を X の**自己同型群** (automorphism group) と呼ぶ．

Proof. (1) 写像の合成は結合律を満たす．(2) 恒等写像 id_X が単位元を与える．(3) 逆元の存在は $\mathrm{Aut}(X)$ の定義において要請されている． □

例 1.6 (対称群)**.** 自然数 n に対し，n 元集合 $[n] \coloneqq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ を考える．その自己同型群

$$\mathfrak{S}_n \coloneqq \mathrm{Aut}([n]) = \{f \colon [n] \to [n] \mid f \text{ は全単射（=置換)}\}$$

を n **次対称群** (symmetric group) という．これは $n!$ 個の元からなる有限群である．

例 1.7 (一般線形群)**.** 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対して，その自己同型群を

$$GL(V) \coloneqq \mathrm{Aut}(V) = \{f \colon V \to V \mid f \text{ は } \mathbb{K} \text{ 線形同型 }\}$$

と書く．これを**一般線型群** (general linear group) という．$V = \mathbb{K}^n$（列ベクトルのなす空間とみなす）のとき，行列を列ベクトルに左から掛けることによって，$\mathbb{K}$ 係数 n 次正方行列と $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^n$ への $\mathbb{K}$ 線形写像を同一視する．このとき，$GL(\mathbb{K}^n)$ は

$$GL_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$$

と同一である．ここで $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 係数 n 次正方行列全体を表す．

定義 1.8. 群 G の 2 元 g, h は $gh = hg$ を満たすとき可換であるという．任意の 2 元が可換であるような群を**可換群**（または **Abel 群**）という．

例 1.9. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は，通常の加法 $(m, n) \mapsto m + n$ を積として可換群になる．

例 1.10. 自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ は一般に非可換群である．

(1) $\mathrm{Aut}(\triangle)$ は非可換である，例えば $R_1 \circ S_1 = S_3$, $S_1 \circ R_1 = S_2$ によって R_1 と S_1 は可換でないことがわかる．
(2) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $n = 1, 2$ の場合を除いて非可換群である．
(3) 一般線形群 $GL_n(\mathbb{K})$ は $n = 1$ の場合 $GL_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^\times$ を除いて非可換群である．

1.2 作用と表現

ここまで与えられた数学的対象の対称性として群という代数構造が自然に現れることを見てきたが，ここからは逆に抽象的に群が与えられたときそれをある数学的対象の対称性（の一部）として実現することを考える．これが群の作用の概念である．その中でもベクトル空間への作用が基本的であり，これを特に群の表現と呼ぶ．

定義 1.11 (群準同型)**.** 2 つの群 G と G' の間の写像 $\rho \colon G \to G'$ は，条件

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \qquad (\forall g, h \in G)$$

を満たすとき，**群準同型** (group homomorphism) であるという．

注意 1.12. $\rho\colon G \to G'$ は群準同型であるとする．$e \in G$, $e' \in G'$ をそれぞれの単位元とすると $\rho(e) = e'$ である．実際，$e = ee$ より $\rho(e) = \rho(ee) = \rho(e)\rho(e)$ であるが，この両辺に左（もしくは右）から $\rho(e)^{-1}$ を掛ければ $e' = \rho(e)$ を得る．また，任意の元 $g \in G$ に対して $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$ である．実際，$e = gg^{-1}$ より

$$e' = \rho(e) = \rho(gg^{-1}) = \rho(g)\rho(g^{-1})$$

であるから，この両辺に $\rho(g)^{-1}$ を左から掛けると

$$\rho(g)^{-1} = \rho(g)^{-1}(\rho(g)\rho(g^{-1})) = (\rho(g)^{-1}\rho(g))\rho(g^{-1}) = \rho(g^{-1}).$$

例 1.13. 以下は線形代数学の講義でおなじみの準同型である．

(1) 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，その符号 $\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$ が定まったことを思い出そう．写像 $\mathrm{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}$ は群準同型である．

(2) 可逆な行列 $A \in GL_n(\mathbb{K})$ に対し，その行列式 $\det A \in \mathbb{K}^\times$ をかえす写像 $\det\colon GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$ は群準同型である．

定義 1.14 (群の同型)**.** 群準同型 $\rho\colon G \to G'$ が**同型** (isomorphism) であるとは，逆向きの群準同型 $\rho'\colon G' \to G$ であって $\rho \circ \rho' = \mathsf{id}_G$ かつ $\rho' \circ \rho = \mathsf{id}_{G'}$ を満たすものが存在することをいう[*2]．2 つの群 G と G' の間に同型写像が存在するとき，G と G' は**同型** (isomorphic) であるといい，$G \cong G'$ と書く．同型 $\cong$ は同値関係である．

例 1.15. 正三角形 $\triangle$ の 3 頂点に p_1, p_2, p_3 とラベルをつける．自己同型 $f \in \mathrm{Aut}(\triangle)$ は頂点の置換を引き起こすので，ある $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ が存在して，任意の $i \in \{1, 2, 3\}$ に対して $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$ を満たす．この対応 $f \mapsto \sigma$ は群同型写像 $\mathrm{Aut}(\triangle) \to \mathfrak{S}_3$ を引き起こす．したがって $\mathrm{Aut}(\triangle) \cong \mathfrak{S}_3$ である．

レポート問題 2. 例 1.15 の同型 $\mathrm{Aut}(\triangle) \cong \mathfrak{S}_3$ を証明せよ（なぜ対応 $f \mapsto \sigma$ は同型写像か？）．より一般に，正 n 角形 $P_n \subset \mathbb{R}^2$ $(n \geq 3)$ について $\mathrm{Aut}(P_n)$ と $\mathfrak{S}_n$ は同型か？

[*2] これは ρ が全単射であることと同値である．

例 1.16. n 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V について，V の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を選ぶと，

$$\varphi \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \coloneqq c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

によって線形同型 $\varphi\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\simeq} V$ が定まる．このとき，対応 $f \mapsto \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ は群の同型 $GL(V) \xrightarrow{\simeq} GL(\mathbb{K}^n) = GL_n(\mathbb{K})$ を与える．したがって $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{K})$ である．

定義 1.17 (群の作用)**.** 群 G と数学的対象 X について，群準同型写像 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ を群 G の X への **（左）作用** (action) と呼ぶ．このとき群 G は X に作用しているという．

注意 1.18. 群の作用 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ が与えられたとき，誤解の生じない場合は ρ を明示せず

$$gx \coloneqq \rho(g)(x) \qquad (g \in G, x \in X)$$

と書くことも多い．このとき任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ について

$$g(hx) = (gh)x, \quad ex = x \tag{1.1}$$

が成り立つ（ただし $e \in G$ は単位元）．

逆に，群 G と数学的対象 X に対し，写像 $G \times X \to X; (g, x) \mapsto gx$ であって，任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ について (1.1) を満たし，かつ各 $g \in G$ について写像 $x \mapsto gx$ が X の付加構造と整合的であるようなものが与えられたとき，$\rho(g)(x) \coloneqq gx$ とおいて G の X への作用 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ が定まる．（したがってこちらを作用の定義としてもよい．）

定義 1.19 (群の表現)**.** $\mathbb{K}$ は体であるとする．群 G の $\mathbb{K}$ ベクトル空間への作用を，群 G の（$\mathbb{K}$ 上の）**表現** (representation) という．すなわち，群 G の（$\mathbb{K}$ 上の）表現とは $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V と群準同型写像 $\rho\colon G \to GL(V)$ からなる組 (V, ρ) のことである．誤解の生じない場合は ρ を明示せず，単に V を G の表現と言うことも多い．また

$$gv \coloneqq \rho(g)(v) \qquad (g \in G, v \in V)$$

と略記することも多い．ベクトル空間 V の次元 $\dim_{\mathbb{K}} V$ を表現 (V, ρ) の次元という．

例 1.20 (一般線形群 $GL(V)$ の自然表現)**.** 任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V について，恒等写像 $\mathsf{id}_{GL(V)}\colon GL(V) \to GL(V)$ は，$GL(V)$ の表現 $(V, \mathsf{id}_{GL(V)})$ を定める．

例 1.21 (自明表現)**.** 任意の群 G と任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V について，すべての元 $g \in G$ を単位元 $\mathrm{id}_V \in GL(V)$ にうつす自明な群準同型写像 $G \to GL(V)$ によって，V は G の表現となる．このような表現を**自明表現**と呼ぶ．

例 1.22. 例 1.13 の群準同型写像 $\mathrm{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1, -1\} \subset \mathbb{K}^\times = GL_1(\mathbb{K})$ および $\det\colon GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times = GL_1(\mathbb{K})$ は，それぞれ $\mathfrak{S}_n$ の 1 次元表現 $(\mathbb{K}, \mathrm{sgn})$ および $GL_n(\mathbb{K})$ の 1 次元表現 $(\mathbb{K}, \det)$ を定める．

表現は作用の特別な場合であるが，線形代数のいろいろなテクニックを駆使して研究できるという利点がある．また次の例 1.23 のように，適切に関数空間などを考えることで群作用から自然に表現を構成できる場合もある．

例 1.23. 群 G が集合 X に作用しているとする．$F(X) \coloneqq \{\varphi\colon X \to \mathbb{K}\}$ を X 上の $\mathbb{K}$ 値関数全体の集合とする．$F(X)$ は通常の関数の和とスカラー倍によって $\mathbb{K}$ ベクトル空間となる．写像 $\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(F(X))$ を

$$(\pi(g)(\varphi))(x) \coloneqq \varphi(g^{-1}x) \qquad (g \in G, \varphi \in F(X), x \in X)$$

によって定義すると，π は群準同型である．このように群 G の表現 $(F(X), \pi)$ を得る．

レポート問題 3. 例 1.23 の写像 π が群準同型であることを確かめよ．

1.3 Lie 群とその Lie 代数

一般線形群 $GL_n(\mathbb{R})$ や $GL_n(\mathbb{C})$ のように連続パラメータをもち，その上で微積分が展開できるような群を Lie 群と呼ぶ[*3]．Lie 群 G に対してその Lie 代数 $\mathrm{Lie}\, G$ と呼ばれる線形代数的データを付与することができ，$\mathrm{Lie}\, G$ は G の局所的な構造を完全に決定する．

ここでは以上の事実を，G が線形 Lie 群（一般線形群の閉部分群）の場合に限定して，多様体論を用いずに概説する．

注意 1.24. ここから §1 の終わりまでは §2 以降の内容の動機づけであり，かなり大雑把な説明も多く含んでいるので，理解できない部分があってもあまり気にせず，何となく雰囲気がつかめれば大丈夫です．一般の場合も含めて厳密にしっかり理解したいという方は [9, 特に 5, 6 章] などを参照してください．

[*3] 一般に Lie 群 G とは群かつ可微分（C^∞ 級）多様体であって「積写像 $G \times G \to G; (g, h) \mapsto gh$ および逆元をとる写像 $G \to G; g \mapsto g^{-1}$ がともに可微分多様体の間の C^∞ 写像である」という条件を満たすもののことである．

定義 1.25 (部分群)**.** 群 G の部分集合 H が G の単位元を含み，積および逆元で閉じている，すなわち条件「$g, h \in H$ ならば $gh \in H$」および「$h \in H$ ならば $h^{-1} \in H$」を満たすとき，部分群であるという．

注意 1.26. 部分群 $H \subset G$ はそれ自身が自然に群であり，包含写像 $H \hookrightarrow G$ は群準同型である．また 2 つの部分群 $H, H' \subset G$ に対し $H \cap H'$ も部分群である．

例 1.27. 任意の自然数 n に対し，$GL_n(\mathbb{R})$ は $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群と見ることができる．実際 $X = (X_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対し，$\overline{X} := (\overline{X_{ij}})$ をその複素共役とすれば

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \overline{X} = X\} \subset GL_n(\mathbb{C}).$$

以下，n を自然数とし，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．

例 1.28 (特殊線形群)**.** $GL_n(\mathbb{K})$ の部分集合

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{X \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$$

は部分群である．実際，$SL_n(\mathbb{K})$ は単位行列 I_n を含み，$X, Y \in SL_n(\mathbb{K})$ ならば $\det(XY) = (\det X)(\det Y) = 1$ かつ $1 = \det(XX^{-1}) = (\det X)(\det X^{-1}) = \det X^{-1}$ より $XY, X^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$ である．$SL_n(\mathbb{K})$ を**特殊線形群** (special linear group) という．

注意 1.29. 一般に群準同型 $\rho\colon G \to G'$ の核 (kernel) $\rho^{-1}(e') \subset G$（e' は G' の単位元）は G の部分群である．例 1.28 の $SL_n(\mathbb{K})$ は $\det\colon GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$ の核である．

例 1.30 (直交群)**.** 直交行列全体のなす $GL_n(\mathbb{K})$ の部分集合

$$O_n(\mathbb{K}) := \{X \in GL_n(\mathbb{K}) \mid {}^tXX = I_n\}$$

は部分群である．ここで ${}^tX$ は行列 X の転置を表す．$O_n(\mathbb{K})$ を**直交群** (orthogonal group) と呼ぶ．また

$$SO_n(\mathbb{K}) := O_n(\mathbb{K}) \cap SL_n(\mathbb{K})$$

を**特殊直交群** (special orthogonal group) と呼ぶ．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，$O_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な正定値内積 $x \cdot y := {}^txy = \sum_{i=1}^n x_iy_i$ を保つ行列全体と見ることもできる．すなわち

$$O_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid (Xx) \cdot (Xy) = x \cdot y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

なお $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ はそれぞれ $O(n)$, $SO(n)$ と書かれることも多い．

例 1.31 (ユニタリ群)**.** ユニタリ行列全体のなす $GL_n(\mathbb{C})$ の部分集合

$$U(n) \coloneqq \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{X}X = I_n\}$$

は部分群である．$U(n)$ を**ユニタリ群** (unitary group) と呼ぶ．また

$$SU(n) \coloneqq U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

を**特殊ユニタリ群** (special orthogonal group) と呼ぶ．$U(n)$ を $\mathbb{C}^n$ の標準的な Hermite 内積 $x \cdot y \coloneqq {}^t\overline{x}y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}y_i$ を保つ行列全体と見ることもできる．すなわち

$$U(n) = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid (Xx) \cdot (Xy) = x \cdot y,\ \forall x, y \in \mathbb{C}^n\}.$$

また $O_n(\mathbb{R}) = U(n) \cap GL_n(\mathbb{R})$ である．

レポート問題 4. 次を示せ：

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

レポート問題 5. (1) V を n 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間，$B(-,-)$ を V 上の正定値対称双一次形式とする．このとき群

$$\mathrm{Aut}(V, B) \coloneqq \{g \in GL(V) \mid B(gx, gy) = B(x, y),\ \forall x, y \in V\}$$

は直交群 $O_n(\mathbb{R})$ と同型であることを示せ．

(2) V を n 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間，$H(-,-)$ を V 上の正定値 Hermite 形式とする．このとき群

$$\mathrm{Aut}(V, H) \coloneqq \{g \in GL(V) \mid H(gx, gy) = H(x, y),\ \forall x, y \in V\}$$

はユニタリ群 $U(n)$ と同型であることを示せ．

以下，n 次複素正方行列の各成分の実部と虚部を座標として，

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^n \oplus \sqrt{-1}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n^2}$$

のように $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ と Euclid 空間 $\mathbb{R}^{2n^2}$ を（位相空間として）同一視する．

定義 1.32 (線型 Lie 群)**.** 一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群 G であって，部分集合として $GL_n(\mathbb{C})$ の閉集合である（すなわち，$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ の閉部分集合 C が存在して $G = GL_n(\mathbb{C}) \cap C$ と書ける）ものを**線型 Lie 群** (linear Lie group) と呼ぶ．

例 1.33. これまでに見てきた $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群 $GL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K})$, $O_n(\mathbb{K})$, $SO_n(\mathbb{K})$, $U(n)$, $SU(n)$ はすべて線型 Lie 群である．これは,「連続関数 $f\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ に関する 1 点 $a \in \mathbb{R}^m$ の逆像 $f^{-1}(a)$ は $\mathbb{R}^l$ の閉集合である」という事実を使って容易に確かめられる．

線型 Lie 群 $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ に対して，その単位元 $e = I_n$ での接空間 T_eG を

$$T_eG \coloneqq \{\gamma'(0) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \text{ は } C^\infty \text{ 級写像で } \gamma(\mathbb{R}) \subset G \text{ かつ } \gamma(0) = e\} \tag{1.2}$$

と定義する．ここで，写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ が C^∞ 級であるとは $\gamma(t)$ の各成分 $\gamma(t)_{ij}$（の実部と虚部）が C^∞ 級関数であることを意味し，$\gamma' \coloneqq \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ である．

補題 1.34. $T_eG \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{R}$ 部分ベクトル空間である．

Proof. γ として単位元 e に値を取る定値写像 $\gamma(t) \equiv e$ をとれば $0 \in T_eG$ がわかる．そこで任意の元 $X_1, X_2 \in T_eG$ とスカラー $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対して $a_1X_1 + a_2X_2 \in T_eG$ であることを示せば良い．$i = 1, 2$ について，T_eG の定義より C^∞ 級写像 $\gamma_i\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n$ で $\gamma_i(\mathbb{R}) \subset G$, $\gamma_i(0) = e$ かつ $X_i = \gamma_i'(0)$ なるものが存在する．このとき $\gamma(t) \coloneqq \gamma_1(a_1t)\gamma_2(a_2t)$ とおくと，$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ は C^∞ 級で $\gamma(\mathbb{R}) \subset G$ かつ $\gamma(0) = e$ を満たし，Leibniz 則より

$$\gamma'(0) = a_1\gamma_1'(0)\gamma_2(0) + a_2\gamma_1(0)\gamma_2'(0) = a_1X_1 + a_2X_2.$$

したがって $a_1X_1 + a_2X_2 \in T_eG$ である． □

補題 1.35. $X \in T_eG$ と $g \in G$ に対して $gXg^{-1} \in T_eX$ である．

Proof. 定義 (1.2) にあるような γ で $\gamma'(0) = X$ なるものをとる．$\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ を $\tilde{\gamma}(t) \coloneqq g\gamma(t)g^{-1}$ とおけば，$\tilde{\gamma}$ は C^∞ 級で $\tilde{\gamma}(\mathbb{R}) \subset G$ かつ $\tilde{\gamma}(0) = geg^{-1} = e$ である．よって $\tilde{\gamma}'(0) = g\gamma'(0)g^{-1} = gXg^{-1} \in T_eG$ を得る． □

注意 1.36. G は線型 Lie 群とする．$g \in G$ と $X \in T_eG$ に対し $\mathrm{Ad}(g)(X) \coloneqq gXg^{-1}$ とおけば，補題 1.35 より $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}(T_eG)$ であり，$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(T_eG)$ は G の $\mathbb{R}$ 上の表現 (T_eG, Ad) を定める．これを G の**随伴表現** (adjoint representation) と呼ぶ．

命題 1.37. $\mathbb{R}$ 部分ベクトル空間 $T_eG \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ は行列の**交換子** (commutator)

$$[X, Y] \coloneqq XY - YX \qquad (X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) \tag{1.3}$$

で閉じている．すなわち，$X, Y \in T_eG$ ならば $[X, Y] \in T_eG$ である．

Proof. 定義 1.2 にあるような γ を $\gamma'(0) = X$ なるようにとる．このとき補題 1.35 より任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\gamma(t)Y\gamma(t)^{-1} \in T_eG$ であり，補題 1.34 より T_eG は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{R}$ 部分ベクトル空間（特に閉集合）であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(t)Y\gamma(t)^{-1})\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\gamma(t)Y\gamma(t)^{-1} - Y}{t} \in T_eG. \tag{1.4}$$

一方，任意の $t \in \mathbb{R}$ について $I_n = \gamma(t)\gamma(t)^{-1}$ であることから，微分して

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(t)\gamma(t)^{-1}) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\right]\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)^{-1}\right]$$

ゆえに

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)^{-1} = -\gamma(t)^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\right]\gamma(t)^{-1} \xrightarrow{t\to 0} -X.$$

以上より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(t)Y\gamma(t)^{-1}) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\right]Y\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)Y\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)^{-1}\right] \xrightarrow{t\to 0} XY - YX$$

となり，(1.4) と併せて，結論 $[X, Y] = XY - YX \in T_eG$ を得る． □

注意 1.38. $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対し，$\mathrm{ad}(X)(Y) := [X, Y]$ とも書く．ここで $\gamma\colon \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ を C^∞ 写像であって，$\gamma(0) = I_n$ かつ $\gamma'(0) = X$ なるものとすると，命題 1.37 の証明は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}(\gamma(t))\bigg|_{t=0} = \mathrm{ad}(X)$$

であることを示している．

定義 1.39 (Lie 代数)**.** $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ は，$\mathbb{K}$ 双線型写像[*4] $[-,-]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が与えられ以下の 2 条件を満たすとき，$\mathbb{K}$ 上の **Lie 代数** (Lie algebra) であるという：

(1) 反対称性：$[X, Y] = -[Y, X]$，$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$;
(2) Jacobi 恒等式：$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$，$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき実 Lie 代数，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき複素 Lie 代数とも呼ぶ．双線形写像 $[-,-]$ は **Lie 括弧** (Lie bracket) と呼ばれる．

[*4] 写像 $[-,-]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が $\mathbb{K}$ 双線型であるとは，任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ と $a, b \in \mathbb{K}$ について

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \quad [X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

が成り立つことである．

注意 1.40. 反対称性から特に $[X, X] = 0,\ \forall X \in \mathfrak{g}$ である．

例 1.41 (一般線型 Lie 代数)**.** $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ は行列の交換子 (1.3) を Lie 括弧として $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数となる（容易に確かめられる）．これを**一般線型 Lie 代数** (general linear Lie algebra) と呼び，Lie 代数であることを強調して $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \coloneqq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ と書く．

系 1.42. 線型 Lie 群 $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ の単位元の接空間 T_eG は行列の交換子を Lie 括弧とする実 Lie 代数である．

Proof. 命題 1.37 および例 1.41 の帰結である． □

T_eG を G の Lie 代数と呼び，Lie 代数であることを強調して

$$\mathrm{Lie}\, G \coloneqq T_eG$$

と書く．線型 Lie 群とは限らない一般の Lie 群 G に対しても，単位元の接空間 T_eG は随伴表現の微分を Lie 括弧として Lie 代数となり，それを $\mathrm{Lie}\, G$ と書く．

注意 1.43 (Jacobi 恒等式の解釈)**.** 一般に，$\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 $X, Y \in \mathfrak{g}$ について，

$$\mathrm{ad}(X)(Y) \coloneqq [X, Y]$$

と書く．この記法と Lie 括弧の反対称性を用いて，Jacobi 恒等式を

$$\mathrm{ad}(X)([Y, Z]) = [\mathrm{ad}(X)(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)(Z)] \qquad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g})$$

と書き換えることができる．すなわち，Jacobi 恒等式は $\mathrm{ad}(X)$ が Leibniz 則を満たすことを表す式であると解釈できる．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ の場合，これは式

$$\mathrm{Ad}(g)[Y, Z] = [\mathrm{Ad}(g)(Y), \mathrm{Ad}(g)(Y)] \qquad (\forall g \in G, \forall Y, Z \in \mathfrak{g})$$

から「g に関する微分」によって導くことができる．注意 1.38 を参照.

1.4 指数写像

具体的な線型 Lie 群の Lie 代数を求めてみよう．それには行列の指数関数[*5]

$$\exp(X) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \qquad (X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$$

[*5] これは線形代数学続論もしくは微分方程式論などの講義ですでに扱われていると期待します.

を用いるのが便利である．右辺の無限級数は広義一様に絶対収束し，$\exp(X)$ は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ からそれ自身への複素解析的（よって特に C^∞ 級）写像を定める．$X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ が可換，すなわち $XY = YX$ を満たすときは，通常の指数関数と同様に $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y)$ がわかる．特に，任意の $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対して $\exp(X)\exp(-X) = \exp(0) = I_n$ であるから $\exp(X) \in GL_n(\mathbb{C})$．また，${}^t\exp(X) = \exp({}^tX)$, $\overline{\exp(X)} = \exp(\overline{X})$, $g \in GL_n(\mathbb{C})$ について $g\exp(X)g^{-1} = \exp(gXg^{-1})$ なども容易にわかる．

例 1.44 (一般線型群の Lie 代数)**.** $\mathrm{Lie}\, GL_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ である．

Proof. (左辺) $\subset$ (右辺) は定義から明らかなので，もう一方の包含関係 (左辺) $\subset$ (右辺) を示す．任意の $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ に対し，$\gamma(t) := \exp(tX)$ とおいて C^∞ 写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ が定まり，$\gamma(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{K})$ かつ $\gamma(0) = \exp(0) = I_n$ をみたす．このとき $\gamma'(0) = X$ であるから，$X \in \mathrm{Lie}\, GL_n(\mathbb{K})$ が従う． □

例 1.45 (直交群の Lie 代数)**.** $\mathrm{Lie}\, O_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Lie}\, SO_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ である．ここで

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{K}) := \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tX = -X\}$$

は歪対称行列全体である．

Proof. C^∞ 級写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ で $\gamma(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{K})$ かつ $\gamma(0) = I_n$ なるものを任意に取る．条件 $\gamma(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{K})$ は「任意の $t \in \mathbb{R}$ について ${}^t\gamma(t)\gamma(t) = I_n$」を意味する．行列式を取ると $(\det\gamma(t))^2 = 1$，つまり $\det\gamma(t) \in \{1, -1\}$ であるが，γ が連続写像であることと $\det\gamma(0) = \det I_n = 1$ であることから，任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\det\gamma(t) = 1$，すなわち $\gamma(\mathbb{R}) \subset SO_n(\mathbb{K})$ である．このことから $\mathrm{Lie}\, O_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Lie}\, SO_n(\mathbb{K})$ が従う．また $I_n = {}^t\gamma(t)\gamma(t)$ の両辺を微分すれば

$$0 = {}^t\gamma'(t)\gamma(t) + {}^t\gamma(t)\gamma'(t) \xrightarrow{t\to 0} 0 = {}^t\gamma'(0) + \gamma'(0).$$

ゆえに $\gamma'(0) \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$, したがって $\mathrm{Lie}\, O_n(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ がわかる．逆の包含関係は, 歪対称行列 $X \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ について $\exp(X) \in O_n(\mathbb{K})$ であること（実際 ${}^t\exp(X) = \exp({}^tX) = \exp(-X)$ である）を用いて，上の例 1.44 の証明と同様にして示される． □

例 1.46 (ユニタリ群の Lie 代数)**.** $\mathrm{Lie}\, U(n) = \mathfrak{u}(n)$ である．ここで

$$\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{X} = -X\}$$

は歪 Hermite 行列全体である．（証明は例 1.45 と同様である．）

例 1.47 (特殊線形群/特殊ユニタリ群の Lie 代数)**.** 次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\operatorname{Lie} SL_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) &:= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0\},\\ \operatorname{Lie} SU(n) = \mathfrak{su}(n) &:= \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \operatorname{tr} X = 0\}.\end{aligned}$$

ここで $\operatorname{tr} X$ は行列 X のトレース（対角成分の和）を表す.

レポート問題 6. 行列 $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対し，$\det \exp(X) = \exp(\operatorname{tr} X)$ であることを示せ（ヒント：Jordan 標準形の応用）．またそれを用いて例 1.47 の主張に証明を与えよ.

上の計算例すべてで「$X \in \operatorname{Lie} G$ ならば $\exp(X) \in G$」が成り立つことに注意しよう．実はこれは一般の線型 Lie 群 G について正しい.

命題 1.48. 線型 Lie 群 $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ について，$X \in \operatorname{Lie} G$ ならば $\exp(X) \in G$ である.

命題 1.48 の証明には次の事実を用いる：行列の対数関数

$$\log(Y) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(Y - I_n)^k}{k}$$

は $Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ が単位行列 I_n に十分近いとき，well-defined な C^∞ 写像を定め，局所的に $\exp(X)$ の逆写像を与える．すなわち，単位行列 I_n に十分近い Y に対し $\exp \circ \log(Y) = Y$ であり，0 に十分近い X に対し $\log \circ \exp(X) = X$ が成り立つ.

命題 1.48 の証明. $X \in \operatorname{Lie} G = T_e G$ に対し，定義より C^∞ 写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ で $\gamma(\mathbb{R}) \subset G$，$\gamma(0) = I_n$ かつ $\gamma'(0) = X$ を満たすものが存在する．G は $GL_n(\mathbb{C})$ の閉集合であるから，このとき

$$\exp(X) = \lim_{k \to \infty} \gamma(1/k)^k \tag{1.5}$$

を示せば，$\exp(X) \in G$ が従う.

自然数 k を大きくとって，$\gamma(1/k)$ が単位元 I_n に十分近く $\exp \circ \log \gamma(1/k) = \gamma(1/k)$ が成り立つようにする．このとき

$$\gamma(1/k)^k = (\exp \circ \log \gamma(1/k))^k = \exp(k \log \gamma(1/k))$$

が成り立つ．$\log \gamma(t)$ の $t = 0$ での Taylor 展開は

$$\log \gamma(t) = tX + t^2(\cdots)$$

という形であり，$(\cdots)$ は $t \to 0$ のとき有界である．ゆえに

$$k \log \gamma(1/k) = X + \frac{1}{k}(\cdots) \xrightarrow{k \to \infty} X$$

となる．したがって

$$\lim_{k\to\infty}\gamma(1/k)^k = \lim_{k\to\infty}\exp(k\log\gamma(1/k)) = \exp(\lim_{k\to\infty}k\log\gamma(1/k)) = \exp(X),$$

すなわち (1.5) を得る． □

命題 1.48 より，行列の指数関数 $\exp\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ の $\mathrm{Lie}\,G = T_eG$ への制限は

$$\exp\colon \mathrm{Lie}\,G \to G$$

という写像を定める．これを**指数写像** (exponential map) と呼ぶ．

さて，本節の冒頭に述べた「$\mathrm{Lie}\,G$ は G の局所的な構造を完全に決定する」について大雑把に説明しよう．指数写像 $\exp\colon \mathrm{Lie}\,G \to G$ は一般には単射でも全射でもないが，局所的には全単射，つまり定義域を $0 \in \mathrm{Lie}\,G$ の小さい開近傍に制限すると G の単位元 I_n の開近傍とのあいだの全単射（より強く同相）を与えることが知られている[*6]．さらに，原点 0 に十分近い $X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ に対して，

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + \cdots \quad (1.6)$$

であり，高次の項 $(\cdots)$ もまた X, Y と Lie 括弧の適当な組み合わせの無限和として明示的に書けることが知られている．これを **Baker–Campbell–Hausdorff の公式**という[*7]．右辺の各項が Lie 括弧のみを用いて表せているので，この公式は線型 Lie 群 G の積構造が単位元のまわりで局所的に $\mathrm{Lie}\,G$ のみから決定されることを示している．

線型 Lie 群とは限らない一般の Lie 群 G についても，指数写像 $\exp\colon \mathrm{Lie}\,G \to G$ が定義でき，同様に $\mathrm{Lie}\,G$ が G の単位元まわりの局所構造を決定することが示される．

1.5 準同型の微分

線型 Lie 群 G と G' の間の準同型 $\psi\colon G \to G'$ といえば，単に群準同型であることに加えて可微分写像であることを要請する．これは

$$\mathrm{Lie}\,G \xrightarrow{\exp} G \xrightarrow{\psi} G' \overset{\text{包含}}{\hookrightarrow} GL_n(\mathbb{C})$$

[*6] たとえば [4, Theorem 1.5] あるいは [9, 定理 5.27] の証明を参照．この事実を用いて線型 Lie 群 G が $GL_n(\mathbb{C})$ の閉部分多様体であり，Lie 群であることが証明される (von Neumann の定理)．

[*7] Campbell–Hausdorff の公式ともいう．この公式の詳細については [9, §5.6(e)] あるいはやや高度だが [6, IV. §7] などを参照されたい

という写像が可微分写像であるという条件と同値になる．このとき任意の $X \in \operatorname{Lie} G$ に対して $\gamma(t) := \psi \circ \exp(tX)$ とおけば，$\gamma\colon \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ は C^∞ 写像で $\gamma(\mathbb{R}) \in G'$ かつ $\psi(0) = I_n$ を満たす．そこで $\psi_* X := \gamma'(0) \in \operatorname{Lie} G'$ として $\mathbb{R}$ 線型写像

$$\psi_*\colon \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} G'$$

が定まる．ψ_* を ψ の微分 (differential) という．任意の $g \in G$ について，構成から

$$\psi_*(\operatorname{Ad}(g)(X)) = \operatorname{Ad}(\psi(g))(\psi_* X)$$

である．これと注意 1.38 から

$$\psi_*[X, Y] = [\psi_* X, \psi_* Y] \qquad (\forall X, Y \in \operatorname{Lie} G) \tag{1.7}$$

が従う．

G' が線型 Lie 群とは限らない一般の Lie 群の場合でも準同型 $\psi\colon G \to G'$ の微分 $\psi_*\colon \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} G'$ が適切に定義され，条件 (1.7) を満たす．

定義 1.49 (Lie 代数の準同型/同型)**.** 体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数のあいだの $\mathbb{K}$ 線形写像 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が（$\mathbb{K}$ 上の）Lie 代数の準同型であるとは，条件

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] \qquad (\forall X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすことである．そのような ρ が可逆であるとき，ρ は Lie 代数の同型であるという．2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ のあいだに Lie 代数の同型が存在するとき，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ は同型であるといい，$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$ と書く．

以上を整理すると，

$$\{\text{ Lie 群 }\} \to \{\text{ 実 Lie 代数 }\}; \quad G \mapsto \operatorname{Lie} G$$

という対応に加えて

$$\{\text{ Lie 群の準同型 } G \to G' \} \to \{\text{ 実 Lie 代数の準同型 } \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} G' \}; \quad \psi \mapsto \psi_* \tag{1.8}$$

という対応がある．後者は準同型の合成と整合的かつ恒等写像を保つ，すなわち

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*, \qquad (\mathsf{id}_G)_* = \mathsf{id}_{\operatorname{Lie} G}$$

を満たす[*8]．

[*8] 圏論の言葉を用いれば，これは $G \mapsto \operatorname{Lie} G$ という対応が Lie 群のなす圏から実 Lie 代数のなす圏への関手であることを意味する．

特に，Lie 群の同型 $G \cong G'$ は実 Lie 代数の同型 $\mathrm{Lie}\, G \cong \mathrm{Lie}\, G'$ を導く．しかし，$\mathrm{Lie}\, G$ は G の局所的構造しか決めないので，逆は一般には成り立たない．例えば，例 1.45 で見たように $\mathrm{Lie}\, O_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Lie}\, SO_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ であるが，$O_n(\mathbb{K}) \ncong SO_n(\mathbb{K})$ である．

レポート問題 7. 実 Lie 代数として $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2)$ であるが，群として $SO_3(\mathbb{R}) \ncong SU(2)$ であることを示せ．

事実 1.50. Lie 群 G と G' について，対応 (1.8) は

(1) G が連結のとき，単射である．
(2) G が連結かつ単連結のとき，全単射である．

ここで Lie 群 G が**連結** (connected) とは，任意の 2 点 $g, h \in G$ に対し $c(0) = g, c(1) = h$ なる連続写像 $c\colon [0,1] \to G$ が存在することをいう[*9]．また連結 Lie 群 G が**単連結** (simply connected) であるとは，任意の連続写像 $c\colon S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to G$ に対し，連続写像 $h\colon D^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \to G$ が存在して，$c = h|_{S^1}$ なることをいう[*10]．

例 1.51. 直交群 $O_n(\mathbb{K})$ は連結でない．実際 $g \in O_n(\mathbb{K})$ を $\det g = -1$ なる元とするとき，単位元 e と g を結ぶ連続曲線 $c\colon [0,1] \to O_n(\mathbb{K})$ が存在しないことが例 1.45 の証明と同様の議論によって示せる．一方 $SO_n(\mathbb{K})$ は連結であることが知られている．

例 1.52. Lie 群 $SU(2)$ は位相空間として 3 次元球面 S^3 に同相である（レポート問題 4 を参照）から，連結かつ単連結である．より一般に $SU(n)$ は連結かつ単連結である．

事実 1.50 はおよそ以下のようなアイデアで証明できる．まず Lie 群の準同型 $\psi\colon G \to G'$ に対し

$$\psi(\exp(X)) = \exp(\psi_* X) \qquad (\forall X \in \mathrm{Lie}\, G) \tag{1.9}$$

が成り立つことに注意する．これは与えられた $X \in \mathrm{Lie}\, G$ に対して，$t \in \mathbb{R}$ に関する 2 つの C^∞ 級関数 $\psi(\exp(tX))$ と $\exp(t(\psi_* X))$ がともに常微分方程式 $f'(t) = (\psi_* X) f(t)$ の解であることに注意して，常微分方程式の解の一意性から従う．

(1) について：もし G が連結であれば，任意の元 $g \in G$ に対し

$$g = \exp(X_1)\exp(X_2)\cdots\exp(X_l) \tag{1.10}$$

[*9] 正確にはこれは弧状連結性の定義であるが，G は可微分多様体なので連結性と弧状連結性は同値である．
[*10] これは基本群 $\pi_1(G, e)$ が自明になることと同値である．

なる $X_1, X_2, \ldots, X_l \in \operatorname{Lie} G$ が存在することが分かる．このとき，(1.9) より

$$\psi(g) = \exp(\psi_* X_1)\exp(\psi_* X_2)\cdots\exp(\psi_* X_l)$$

となるので，ψ は ψ_* だけから決まる．すなわち，対応 (1.8) の単射性が従う．

(2) について：逆に Lie 代数の準同型 $\phi\colon \operatorname{Lie} G \to \operatorname{Lie} G'$ が与えられたとき，表示 (1.10) を用いて

$$\psi(g) \overset{!}{\coloneqq} \exp(\phi X_1)\exp(\phi X_2)\cdots\exp(\phi X_l)$$

と「定義」すれば，Lie 群の準同型 $\psi\colon G \to G'$ であって $\psi_* = \phi$ なるものが得られるように思える．しかし，一般に表示 (1.10) は一意的ではないので，ψ が well-defined であること，すなわち別の表示

$$g = \exp(X_1')\exp(X_2')\cdots\exp(X_{l'}')$$

を取ったときに，

$$\exp(\phi X_1')\exp(\phi X_2')\cdots\exp(\phi X_{l'}') = \exp(\phi X_1)\exp(\phi X_2)\cdots\exp(\phi X_l)$$

であることを示さなくてはならない．これを保証するための条件が，G の単連結性である．詳細については例えば [9, 6 章 1 節] を参照されたい．

事実 1.53. 任意の連結 Lie 群 G について，$\operatorname{Lie} G \cong \operatorname{Lie} \tilde{G}$ をみたす連結かつ単連結な Lie 群 $\tilde{G}$ が同型を除いてただ一つ存在し，被覆全射準同型 $\pi\colon \tilde{G} \to G$ がある．群 $\tilde{G}$ を G の**普遍被覆群** (universal covering group) という．このとき核 $\pi^{-1}(e) \subset \tilde{G}$ は $\tilde{G}$ の（中心的）離散部分群であって，G の基本群 $\pi_1(G, e)$ に一致する．

例 1.54. $GL_1^+(\mathbb{R}) \coloneqq \mathbb{R}_{>0} = \{e^t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^\times = GL_1(\mathbb{R})$ と $U(1) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ は互いに同型な Lie 代数を持つ可換連結 Lie 群だが，$GL_1^+(\mathbb{R})$ は単連結，$U(1)$ は単連結でない．すなわち $GL_1^+(\mathbb{R})$ は $U(1)$ の普遍被覆群であり，写像

$$GL_1^+(\mathbb{R}) \to U(1); \quad e^t \mapsto e^{\sqrt{-1}t}$$

が被覆全射準同型を与える．

例 1.55. $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ であり，$SU(2)$ は連結かつ単連結，$SO_3(\mathbb{R})$ は連結だが単連結ではない．すなわち $SU(2)$ は $SO_3(\mathbb{R})$ の普遍被覆群である．$SU(2) \to SO_3(\mathbb{R})$ なる $2:1$ 全射準同型を具体的に構成することができる．詳しくは [7, §4.3.1] を参照．

注意 1.56. 線型 Lie 群 G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ は線型 Lie 群にならない（Lie 群として一般線型群に埋め込めない）場合がある．例えば $G = SL_2(\mathbb{R})$ がその典型例である．

1.6 Lie 群の表現から複素 Lie 代数の表現へ

さて，表現について話を移そう．以下，単に表現といえば $\mathbb{C}$ 上の表現を意味するものとする．まずは Lie 代数の表現を定義する．

定義 1.57. $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V に対し，V 上の自己線形写像全体

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) = \{f\colon V \to V \mid f \text{ は } \mathbb{C} \text{ 線型写像 }\}$$

は線形写像の交換子 $[f, g] \coloneqq f \circ g - g \circ f$ を Lie 括弧とする複素 Lie 代数である．Lie 代数であることを強調してこれを $\mathfrak{gl}(V) \coloneqq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ と書く．

注意 1.58. V が有限次元のとき，基底をとることによって $\mathbb{C}$ 線型同型 $\varphi\colon \mathbb{C}^n \xrightarrow{\simeq} V$ が定まり，対応 $f \mapsto \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ によって群の同型 $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$ が得られるのであった．特に $GL(V)$ は Lie 群である．このとき全く同じ対応によって，複素 Lie 代数の同型 $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ を得る．また Lie 代数の自然な[*11]同型 $\mathrm{Lie}\, GL(V) \cong \mathfrak{gl}(V)$ がある．以下，$\mathrm{Lie}\, GL(V)$ と $\mathfrak{gl}(V)$ を同一視する．

群 G の表現とは $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V と群準同型 $\rho\colon G \to GL(V)$ からなる組 (V, ρ) であった．G が Lie 群で V が有限次元のときは，ρ が Lie 群の準同型であることを要請する．このとき準同型 ρ を微分することで実 Lie 代数の準同型

$$\rho_*\colon \mathrm{Lie}\, G \to \mathfrak{gl}(V)|_{\mathbb{R}}$$

を得る．ここで $\mathfrak{gl}(V)|_{\mathbb{R}}$ はスカラーを制限して $\mathfrak{gl}(V)$ を実 Lie 代数と見たものを表す．

定義 1.59 (Lie 代数の表現)**.**

(1) 実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とは, $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V と実 Lie 代数の準同型 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)|_{\mathbb{R}}$ からなる組 (V, ρ) のことである．

(2) 複素 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とは，$\mathbb{C}$ ベクトル空間 V と複素 Lie 代数の準同型 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ からなる組 (V, ρ) のことである．

この術語を用いれば，Lie 群 G に対して

$$\{\ G \text{ の有限次元表現 }\} \to \{\ \mathrm{Lie}\, G \text{ の有限次元表現 }\}; \quad (V, \rho) \mapsto (V, \rho_*) \tag{1.11}$$

[*11] V の基底の取り方に依存しないという意味.

という対応がある[*12]．事実 1.50 により，この対応 (1.11) は G が連結かつ単連結のとき全単射である．

次に，実 Lie 代数の**複素化** (complexification) と呼ばれる簡単なレシピによって，実 Lie 代数の表現と複素 Lie 代数の表現を結びつける．実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \coloneqq \{x + \mathbf{i}y \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$$

という形式和全体の集合を考える．この集合 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造を

$$\begin{aligned} (x + \mathbf{i}y) + (x' + \mathbf{i}y') &\coloneqq (x + x') + \mathbf{i}(y + y') && (x, y, x', y' \in \mathfrak{g}), \\ (a + \sqrt{-1}b)(x + \mathbf{i}y) &\coloneqq (ax - by) + \mathbf{i}(ay + bx) && (x, y \in \mathfrak{g},\ a, b \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

によって定義し，さらに Lie 括弧 $[-,-]\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を

$$[x + \mathbf{i}y, x' + \mathbf{i}y'] \coloneqq ([x, x'] - [y, y']) + \mathbf{i}([x, y'] + [y, x'])$$

と定義すれば，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は複素 Lie 代数となることが直接チェックできる．複素 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の複素化という．

注意 1.60. 上で定義した複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は，$\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ に

$$[x \otimes a, y \otimes b] \coloneqq [x, y] \otimes ab \qquad (\forall x, y \in \mathfrak{g},\ \forall a, b \in \mathbb{C})$$

と Lie 括弧を定めて複素 Lie 代数の構造を入れたものと自然に同型である．実際，$\mathbb{R}$ 線型同型 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ を $x + \mathbf{i}y \mapsto x \otimes 1 + y \otimes \sqrt{-1}$ と定めれば，これが複素 Lie 代数の同型を与える．テンソル積に慣れている人は $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ を複素化の定義と思っても良い．

注意 1.61. 構成から $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = 2\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$，ゆえに $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．

例 1.62. 任意の自然数 n について，次の（ほとんど自明な）複素 Lie 代数の同型がある：

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \quad \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \quad \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}).$$

これらはいずれも左辺の $x + \mathbf{i}y$ を右辺の $x + \sqrt{-1}y$ に写すことによって得られる．

一方で次の 2 つの同型はやや非自明かもしれない：

$$\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \quad \mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}). \tag{1.12}$$

[*12] 圏論の言葉を用いれば，この対応は G の有限次元表現の圏から $\mathrm{Lie}\, G$ の有限次元表現の圏への関手として精密化される．

レポート問題 8. 複素 Lie 代数の 2 つの同型 (1.12) を証明せよ．

注意 1.63. 2 つの実 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ について，もし $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$ ならば当然 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ が成り立つ．一方で，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ であったとしても $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$ とは限らない．実際，上の例 1.62 で見たように複素 Lie 代数として $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}$ であるが，$n > 1$ ならば実 Lie 代数として $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \ncong \mathfrak{su}(n)$ である．

命題 1.64. $\mathfrak{g}$ は実 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ は複素 Lie 代数であるとする．任意の実 Lie 代数の準同型 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}|_{\mathbb{R}}$[*13]に対し，写像 $\rho_{\mathbb{C}}\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}$ を

$$\rho_{\mathbb{C}}(x + \mathbf{i}y) := \rho(x) + \sqrt{-1}\rho(y) \qquad (\forall x, y \in \mathfrak{g})$$

によって定義すると，$\rho_{\mathbb{C}}$ は複素 Lie 代数の準同型になる．対応 $\rho \mapsto \rho_{\mathbb{C}}$ は自然な全単射

$$\{\text{ 実 Lie 代数の準同型 } \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}|_{\mathbb{R}} \text{ }\} \xrightarrow{1:1} \{\text{ 複素 Lie 代数の準同型 } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h} \text{ }\}$$

を与える．

証明のスケッチ．写像 $\rho_{\mathbb{C}}$ が複素 Lie 代数の準同型になることは直接確かめられる．複素 Lie 代数の準同型 $\varphi\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}$ に対し，実 Lie 代数の準同型 $\varphi|_{\mathbb{R}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}|_{\mathbb{R}}$ を $\varphi|_{\mathbb{R}}(x) := \varphi(x + \mathbf{i}0)$, $\forall x \in \mathfrak{g}$ によって定めると，$\varphi \mapsto \varphi|_{\mathbb{R}}$ は対応 $\rho \mapsto \rho_{\mathbb{C}}$ の逆対応を与えることが分かる．ゆえに全単射性が従う． □

レポート問題 9 (圏論を知っている人向け)**.** 命題 1.64 の精密化として，スカラーの制限 $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}|_{\mathbb{R}}$ を複素 Lie 代数の圏から実 Lie 代数の圏への関手とみなせること，複素化 $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ がその左随伴関手を与えることを示せ．

系 1.65. 実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について次の自然な全単射がある：

$$\{\text{ 実 Lie 代数 } \mathfrak{g} \text{ の表現 }\} \xrightarrow{1:1} \{\text{ 複素 Lie 代数 } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ の表現 }\}; \quad (V, \rho) \mapsto (V, \rho_{\mathbb{C}}). \tag{1.13}$$

2 つの対応 (1.11) と (1.13) をまとめると，任意の連結 Lie 群 G について

$$\left\{\begin{array}{c}\text{連結 Lie 群 } G \\ \text{の有限次元表現}\end{array}\right\} \xhookrightarrow{(*)} \left\{\begin{array}{c}\text{実 Lie 代数 } \mathrm{Lie}\, G \\ \text{の有限次元表現}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{array}{c}\text{複素 Lie 代数 } (\mathrm{Lie}\, G)_{\mathbb{C}} \\ \text{の有限次元表現}\end{array}\right\}$$

という対応を得る．$(*)$ は一般には単射であるが，G が単連結のときは全単射になる．この対応によって Lie 群の有限次元表現論を複素 Lie 代数の有限次元表現論に帰着できる．

[*13] ここで $\mathfrak{h}|_{\mathbb{R}}$ は複素 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ のスカラーを実数 $\mathbb{R}$ に制限して（つまり「複素数倍」という付加構造を忘れ「実数倍」だけを覚えておくことによって）実 Lie 代数とみなしたものを表す．特に集合としては $\mathfrak{h}|_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}$ であって，$\mathfrak{h}|_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{h}$ の基底のとり方などに依存しない．

例 1.66. 複素 Lie 代数として $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ であった（例 1.62 を参照）．また Lie 群 $SU(2)$ は連結かつ単連結である（例 1.52 を参照）．よって

$$\begin{array}{cl} & \{\text{ Lie 群 } SL_2(\mathbb{R}) \text{ の有限次元表現 }\} \\ \overset{(*)}{\hookrightarrow} & \{\text{ 実 Lie 代数 } \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \text{ の有限次元表現 }\} \\ \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{ 複素 Lie 代数 } \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \text{ の有限次元表現 }\} \\ \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{ 実 Lie 代数 } \mathfrak{su}(2) \text{ の有限次元表現 }\} \\ \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{ Lie 群 } SU(2) \text{ の有限次元表現 }\} \end{array}$$

という対応がある．Lie 群 $SL_2(\mathbb{R})$ は連結だが単連結でない．しかし今の場合，実は上記の単射 $(*)$ は全射でもあることが分かり，結果として

$$\{\text{ Lie 群 } SL_2(\mathbb{R}) \text{ の有限次元表現 }\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ Lie 群 } SU(2) \text{ の有限次元表現 }\}$$

という対応が得られる．このように良い条件下では非コンパクト Lie 群（ここでは $SL_2(\mathbb{R})$）の有限次元表現がコンパクト Lie 群（ここでは $SU(2)$）の有限次元表現に対応し，コンパクト群の表現論におけるいろいろな良い性質（たとえば完全可約性）が非コンパクト群の表現論に伝播する．このような論法を **Weyl のユニタリ・トリック**と呼ぶ．詳細は [9, §12] を参照．

2　$\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現論

さて，ここからは複素 Lie 代数の表現について考える．この節では，表現に関する一般的な概念を導入しつつ，具体例として Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2 \coloneqq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の有限次元表現論について詳しく説明する．

2.1　一般論からの準備

まず Lie 代数の表現に関する一般的な用語などを準備する．§1 をスキップしてここから講義ノートを読むという人のために，Lie 代数とその表現の定義から復習しておこう．

定義 2.1 (Lie 代数)**.** $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ は，Lie 括弧と呼ばれる写像 $[-,-]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ が与えられ，任意の $x,y,z\in\mathfrak{g}$ および $a,b\in\mathbb{C}$ について 3 条件

(0) 双線型性：$[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z]$, $[x,ay+bz]=a[x,y]+b[x,z]$
(1) 反対称性：$[x,y]=-[y,x]$,
(2) Jacobi 恒等式：$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$,

を満たすとき，**複素 Lie 代数** (complex Lie algebra) であるという．

<u>以下，単に Lie 代数と言えば，複素 Lie 代数を意味するものと約束する．</u>

例 2.2. 自然数 n に対し，n 次正方行列全体のなすベクトル空間

$$\mathfrak{gl}_n=\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})\coloneqq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$$

は，行列の交換子 $[A,B]\coloneqq AB-BA$ を Lie 括弧とする Lie 代数である．また，$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ の以下の部分ベクトル空間は行列の交換子について閉じている：

$$\mathfrak{sl}_n=\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\coloneqq\{X\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\mid \operatorname{tr}X=0\},$$
$$\mathfrak{so}_n=\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})\coloneqq\{X\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\mid {}^tX=-X\}.$$

したがって，これらも行列の交換子を Lie 括弧とする Lie 代数である．

定義 2.3 (Lie 代数の準同型)**.** 2 つの Lie 代数のあいだの線型写像 $\rho\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ が **Lie 代数の準同型**であるとは，任意の $x,y\in\mathfrak{g}$ について

$$\rho([x,y])=[\rho(x),\rho(y)]$$

を満たすことをいう．そのような ρ が可逆，すなわち Lie 代数の準同型 $\rho'\colon \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ が存在で $\rho' \circ \rho = \mathsf{id}_{\mathfrak{g}}$ かつ $\rho \circ \rho' = \mathsf{id}_{\mathfrak{g}'}$ をみたすものが存在するとき，ρ は **Lie 代数の同型**であるという[*14]．2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ のあいだに Lie 代数の同型が存在するとき，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ は**同型**であるといい，$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$ と書く．

例 2.4. $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V に対し，その自己線形写像全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間

$$\mathfrak{gl}(V) \coloneqq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

は，交換子 $[f, g] \coloneqq f \circ g - g \circ f$ を Lie 括弧とする Lie 代数である．$V = \mathbb{C}^n$ のとき，$\mathbb{C}^n$ の自己線形写像を n 次正方行列を同一視することで，Lie 代数として $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n) = \mathfrak{gl}_n$ と同一視できる．より一般に $\dim_{\mathbb{C}} V = n < \infty$ のとき，基底をとることによって $\mathbb{C}$ 線型同型 $\varphi\colon \mathbb{C}^n \xrightarrow{\simeq} V$ が定まり，対応 $f \mapsto \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ は Lie 代数の同型 $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n) = \mathfrak{gl}_n$ を与える．

定義 2.5 (表現)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**表現**とは, $\mathbb{C}$ ベクトル空間と Lie 代数の準同型 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ からなる組 (V, ρ) のことである．ここで ρ が準同型であることは,「線型写像であって，任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ について

$$\rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) \tag{2.1}$$

を満たすこと」と言い換えても良い．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 (V, ρ) が与えられたとき，

$$xv = x \cdot v = \rho(x)v$$

のように略記することが多い．この記法の下で (2.1) は，任意の $v \in V$ について

$$[x, y]v = x(yv) - y(xv) \tag{2.2}$$

が成り立つことを意味する．また ρ を明示せず，単に V を表現ということも多い．

例 2.6 (自明表現)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $V = (V, \rho)$ は，任意の $x \in \mathfrak{g}$ について $\rho(x) = 0$ を満たす，すなわち任意の $x \in \mathfrak{g}$ と $v \in V$ について $xv = 0$ を満たすとき，自明であるという．

[*14] これは ρ が線型同型であることと同値である．

例 2.7 (ベクトル表現)**.** 任意の $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V について，恒等写像 $\mathsf{id}_{\mathfrak{gl}(V)}\colon \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ はもちろん Lie 代数の準同型である．表現 $(V, \mathsf{id}_{\mathfrak{gl}(V)})$ を $\mathfrak{gl}(V)$ のベクトル表現（あるいは自然表現）という．

例 2.8 (随伴表現)**.** 一般の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ において，反対称性を使って Jacobi 恒等式を

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

と書き換えることができる．線形写像

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

を $\mathrm{ad}(x)(y) \coloneqq [x, y]$ によって定めれば，上の式は

$$\mathrm{ad}([x, y]) = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x)$$

が成り立つこと，すなわち ad が Lie 代数の準同型であることを意味している．このようにして得られる $\mathfrak{g}$ の表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現** (adjoint representation) と呼ぶ．

定義 2.9 (部分表現/商表現)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V について，部分ベクトル空間 $U \subset V$ が「任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $xU \coloneqq \{xu \mid u \in U\} \subset U$」を満たすとき，$U$ を V の**部分表現** (subrepresentation) という．部分表現 U はそれ自身 $\mathfrak{g}$ の表現である．このとき商ベクトル空間 V/U[*15]は

$$x \cdot (v + U) \coloneqq xv + U \qquad (x \in \mathfrak{g}, v \in V)$$

によって自然に $\mathfrak{g}$ の表現となる[*16]．これを**商表現** (quotient representation) という．

定義 2.10 (既約表現/可約表現)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $V \neq \{0\}$ は，$\{0\}$ と V 自身以外に部分表現を持たないとき**既約** (irreducible) であるといい，そうでないとき**可約** (reducible) であるという．

例 2.11. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の自明表現 V について，V が既約であることと $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ なることは同値である．実際，自明表現 V において，任意の部分ベクトル空間 $U \subset V$ は部分表現である．よって V が既約であることは，V が $\{0\}$ と V 自身以外に部分ベクトル空間を持たないことを意味する．

[*15] 念のため思い出しておくと，ベクトル空間 V とその部分ベクトル空間 U が与えられたとき，V に「$v \sim v' \overset{\text{def.}}{\iff} v - v' \in U$」なる同値関係 $\sim$ が定まる．このとき商集合 $V/U \coloneqq V/\sim$ には自然に $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造が入り，これを商ベクトル空間というのだった．このとき記号 $v + U$ は $v \in V$ を含む同値類を表す．

[*16] 実際，$v - v' \in U$ のとき $xv - xv' = x(v - v') \in xU \subset U$ であるから，$xv + U$ は代表元 v のとり方に依らず，well-defined である．

定義 2.12 (表現の準同型)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の 2 つの表現 $V = (V, \rho)$ と $V' = (V', \rho')$ について，線形写像 $\varphi\colon V \to V'$ が条件

$$\varphi(xv) = x\varphi(v) \qquad (\forall x \in \mathfrak{g}, \forall v \in V)$$

を満たすとき，V から V' への準同型（あるいは $\mathfrak{g}$ 準同型）という．この条件は

$$\varphi \circ \rho(x) = \rho'(x) \circ \varphi \qquad (\forall x \in \mathfrak{g})$$

なること，すなわち任意の $x \in \mathfrak{g}$ について図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho(x)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(x)"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & V' \end{tikzcd}$$

が可換であること，と言い換えても良い．V から V' への準同型全体を

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') \coloneqq \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V') \mid \varphi \text{ は準同型 }\}$$

と書く．これは $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ の部分ベクトル空間である．また

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$$

とおく．これは $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ の部分ベクトル空間である．

可逆な準同型を同型という．これは全単射準同型と同じである．$\mathfrak{g}$ の 2 つの表現 V と V' のあいだに同型が存在するとき，V と V' は同型であるといい，$V \cong V'$ と書く．

レポート問題 10. $\mathfrak{g}$ は Lie 代数，V, V', V'' は $\mathfrak{g}$ の表現であるとする．以下を示せ．

(1) 2 つの準同型 $\varphi\colon V \to V'$ と $\varphi'\colon V' \to V''$ が与えられたとき，それらの合成 $\varphi' \circ \varphi\colon V \to V''$ はまた準同型である．

(2) 表現として $V' \cong V''$ であるとき，線型同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V''), \quad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V', V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V'', V)$$

が存在する．

レポート問題 11 (準同型定理)**.** $\mathfrak{g}$ は Lie 代数，V と V' はともに $\mathfrak{g}$ の表現，$\varphi\colon V \to V'$ は準同型であるとする．このとき核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は V の部分表現であり，像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ は V' の部分表現であることを示せ．さらに表現の同型 $V/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$ を示せ．

補題 2.13 (Schur の補題)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現 V について

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \mathbb{C}\mathsf{id}_V$$

が成り立つ.

Proof. 右辺が左辺に含まれることは明らかである．逆の包含を示す．任意の自己準同型 $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ に対し，その固有値 $a \in \mathbb{C}$ をひとつとる．このとき $\varphi - a \cdot \mathsf{id}_V$ は V の自己準同型であり，その核 $\mathrm{Ker}(\varphi - a \cdot \mathsf{id}_V)$ は V の $\{0\}$ でない部分表現である．V が既約表現であることから， $\mathrm{Ker}(\varphi - a \cdot \mathsf{id}_V) = V$，すなわち $\varphi = a \cdot \mathsf{id}_V$ でなくてはならない．ゆえに左辺が右辺に含まれることがわかる． □

定理 2.14 (Schur の補題)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の 2 つの既約表現 V と V' について，0 でない準同型 $\varphi\colon V \to V'$ は同型である．さらに V と V' がともに有限次元ならば，次が成り立つ：

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') = \begin{cases} 1 & V \cong V' \text{ のとき}, \\ 0 & V \ncong V' \text{ のとき}. \end{cases}$$

Proof. 0 でない準同型 $\varphi\colon V \to V'$ について，核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は V の部分表現であって V 自身とは異なる．V は既約なので $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$，すなわち φ は単射である．他方，$\mathrm{Im}\,\varphi$ は V' の $\{0\}$ でない部分表現である．V' は既約なので $\mathrm{Im}\,\varphi = V$，すなわち φ は全射である．したがって φ は全単射準同型，すなわち同型である．これより $V \ncong V'$ ならば $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') = \{0\}$ であることも分かる．また，V と V' がともに有限次元で $V \cong V'$ の場合は，レポート問題 10 (2) および補題 2.13 より，

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) = \mathbb{C}\mathsf{id}_V$$

は 1 次元ベクトル空間である． □

2.2 $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現

さて，ここからは Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ について考えよう．これは

$$\mathfrak{sl}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

なる 3 次元ベクトル空間を行列の交換子を Lie 括弧として Lie 代数とみなしたものである．基底として

$$e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

からなる集合 $\{e, f, h\}$ がとれる．Lie 代数構造はこれらのあいだの Lie 括弧

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f, \qquad [e, f] = h \tag{2.3}$$

によって決まる．$V = (V, \rho)$ を $\mathfrak{sl}_2$ の表現とすると V 上の 3 つの自己線型作用素

$$E \coloneqq \rho(e), \qquad F \coloneqq \rho(f), \qquad H \coloneqq \rho(h)$$

は関係式

$$HE - EH = 2E, \qquad HF - FH = -2F, \qquad EF - FE = H \tag{2.4}$$

を満たす（簡単のため写像の合成の記号 $\circ$ は省略している）．逆に，あるベクトル空間 V 上に関係式 (2.4) を満たす 3 つの自己線型写像 $E, F, H \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が与えられたとき，線型写像 $\rho\colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(V)$ を

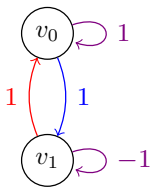
$$\rho\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = aH + bE + cF$$

と定めれば ρ は Lie 代数の準同型，すなわち $V = (V, \rho)$ は $\mathfrak{sl}_2$ の表現となる．よって $\mathfrak{sl}_2$ の表現とは，関係式 (2.4) を満たす自己線形写像の 3 つ組 $E, F, H \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ を備えたベクトル空間 V のことと思うことができる．

例 2.15 (ベクトル表現)**.** 包含写像 $\iota\colon \mathfrak{sl}_2 \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2 = \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ はもちろん Lie 代数の準同型であるから，$(\mathbb{C}^2, \iota)$ は $\mathfrak{sl}_2$ の 2 次元表現である．これを $\mathfrak{sl}_2$ のベクトル表現という．標準的な基底の元 $v_0 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対する e, f, h の作用は

$$\begin{aligned} &e \cdot v_0 = 0, && f \cdot v_0 = v_1, && h \cdot v_0 = v_0, \\ &e \cdot v_1 = v_0, && f \cdot v_1 = 0, && h \cdot v_1 = -v_1 \end{aligned}$$

で与えられる．つまり v_0, v_1 は h 作用に関する固有ベクトルであり，e, f の作用によって互いに移り合う．これを絵で描くと

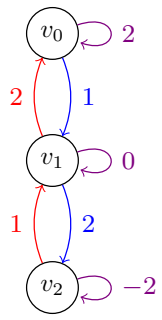


のようになる．ここで，上向き矢印（赤），下向き矢印（青），ループ矢印（紫）がそれぞれ e, f, h の作用を表す．

例 2.16 (随伴表現)**.** 随伴表現 $(\mathfrak{sl}_2, \mathrm{ad})$ は $\mathfrak{sl}_2$ の 3 次元既約表現である．これは

$$\mathrm{ad}(e)\colon \begin{cases} -e \mapsto 0, \\ h \mapsto 2(-e), \\ f \mapsto h, \end{cases} \qquad \mathrm{ad}(f)\colon \begin{cases} -e \mapsto h, \\ h \mapsto 2f, \\ f \mapsto 0, \end{cases} \qquad \mathrm{ad}(h)\colon \begin{cases} -e \mapsto 2(-e), \\ h \mapsto 0, \\ f \mapsto -2f, \end{cases}$$

を満たす．そこで $v_0 \coloneqq -e, v_1 \coloneqq h, v_2 \coloneqq f$ とおいて，$\mathfrak{sl}_2$ の基底 $\{v_0, v_1, v_2\}$ に関して e, f, h の作用を図示すれば



のようになる．

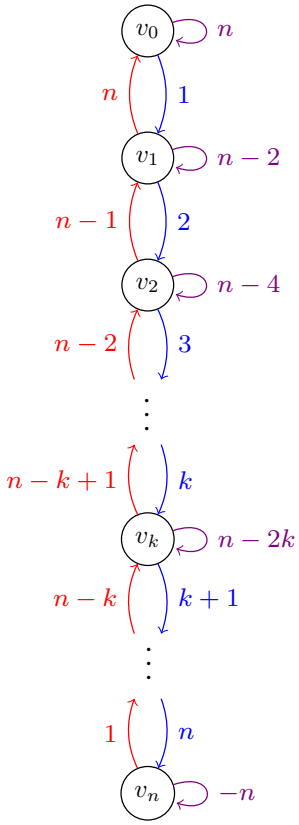
上の例 2.15, 2.16 を一般化して，任意の非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $n+1$ 次元表現を構成できる．$\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ を基底とする $n+1$ 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $V(n) \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{C}v_k$ を考える．$V(n)$ 上の線型作用素 $E, F, H \in \mathfrak{gl}(V(n))$ を，各 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対し

$$Ev_k = (n-k+1)v_{k-1}, \qquad Fv_k = (k+1)v_{k+1}, \qquad Hv_k = (n-2k)v_k, \tag{2.5}$$

（ただし $v_{-1} = v_{n+1} = 0$ と約束する）として定めると，関係式 (2.4) が満たされる．例えば，各 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対し

$$\begin{aligned} (EF - FE)v_k &= EFv_k - FEv_k \\ &= (k+1)Ev_{k+1} - (n-k+1)Fv_{k-1} \\ &= ((k+1)(n-k) - (n-k+1)k)v_k \\ &= (n-2k)v_k \\ &= Hv_k \end{aligned}$$

となるので，$EF - FE = H$ がわかる．(2.4) の残りの 2 式の証明はより易しい．したがって $\rho(e) \coloneqq E, \rho(f) \coloneqq F, \rho(h) \coloneqq H$ なる線型写像 $\rho\colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(V(n))$ は Lie 代数の準同型を与え，$V(n) = (V(n), \rho)$ は $\mathfrak{sl}_2$ の $n+1$ 次元表現となる．表現 $V(n)$ の構造は以下のように図示できる：



特に $V(0)$ は 1 次元自明表現，$V(1)$ はベクトル表現，$V(2)$ は随伴表現（に同型）である．

命題 2.17. 任意の非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，表現 $V(n)$ は既約である．

Proof. $U \subset V$ を $\{0\}$ でない部分表現とする．元 $v \in U \setminus \{0\}$ をひとつとる．$v = \sum_{k=0}^{n} c_k v_k$ と基底の元の線形結合で書き，$m := \max\{k \mid c_k \neq 0\}$ とおく．このとき $E^m v = \frac{n!}{m!} c_m v_0 \in \mathbb{C}^\times v_0$ となるが，U が部分表現であることより $E^m v \in U$，したがって $v_0 \in U$ である．すると各 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について $F^k v_0 = k! v_k \in U$ より $v_k \in U$ である．ゆえに $U = V(n)$ である．つまり $\{0\}$ でない部分表現は $V(n)$ 以外にない，すなわち $V(n)$ は既約である． □

定理 2.18 ($\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現の分類)**.** $\mathfrak{sl}_2$ の任意の $n+1$ 次元既約表現 ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) は命題 2.17 で構成した既約表現 $V(n)$ に同型である．すなわち $\{V(n) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現の同型類の完全代表系を与える．

定理 2.18 は，後で示す定理 2.24 から直ちに導かれるので，ここでは証明しない．

2.3 表現の直和と完全可約性

定義 2.19. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の 2 つの表現 V, V' に対し，それらのベクトル空間としての直和

$$V \oplus V' = \{v + v' \mid v \in V, v' \in V'\}$$

に Lie 代数の作用を

$$x \cdot (v + v') \coloneqq xv + xv' \qquad (x \in \mathfrak{g}, v \in V, v'v \in V')$$

と定めると，$V \oplus V'$ は $\mathfrak{g}$ の表現となる．このようにして得られる表現 $V \oplus V'$ を表現 V と V' の直和という．3 個以上の表現の直和 $V^1 \oplus V^2 \oplus \cdots \oplus V^d$ も同様に定義する．また $V^{\oplus d} \coloneqq \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{d\text{ 個}}$ などと略記する．

注意 2.20. ベクトル空間の直和と同様に，表現の直和は結合律を満たす．すなわち Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V, V', V'' に対し，自然な表現としての同型

$$(V \oplus V') \oplus V'' \cong V \oplus V' \oplus V'' \cong V \oplus (V' \oplus V'')$$

がある．

補題 2.21. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V, V', V'' について，自然な線型同型

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V' \oplus V'') &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') \oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V''), \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V \oplus V', V'') &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V'') \oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V', V'') \end{aligned}$$

が存在する．

Proof. 任意の線型写像 $f\colon V \to V' \oplus V''$ に対し，線型写像 $f'\colon V \to V'$ および $f''\colon V \to V''$ を，任意の $v \in V$ に対して $f(v) = f'(v) + f''(v)$ を満たすものとして定義すれば，対応 $f \mapsto (f', f'')$ が線型同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V' \oplus V'') \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V') \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V'')$$

を与えるのだった．このとき「f が $\mathfrak{g}$ 準同型である」ことと「f' と f'' がともに $\mathfrak{g}$ 準同型である」ことが同値であることに注意すれば，示すべき最初の同型が得られる．2 つ目の同型も同様に示される． □

定義 2.22. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 V は，いくつかの既約表現の直和に同型であるとき，すなわち既約表現 $V^1, V^2, \ldots, V^d$ が存在して，

$$V \cong V^1 \oplus V^2 \oplus \cdots \oplus V^d \tag{2.6}$$

となるとき**完全可約** (completely reducible) であるという．

命題 2.23 (既約分解の一意性)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の同型類の完全代表系 $\mathscr{S}$ をひとつ選ぶ．このとき $\mathfrak{g}$ の完全可約な有限次元表現 V について，同型

$$V \cong \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} S^{\oplus m_S(V)} \qquad \text{ただし } m_S(V) := \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S, V),$$

が存在する．

Proof. V は完全可約なので既約表現の直和への同型 (2.6) を持つ．このとき各既約表現 $S \in \mathscr{S}$ に対し，補題 2.21，レポート問題 10(2) および Schur の補題（定理 2.14）より

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S, V) = \sum_{i=1}^{d} \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(S, V^i) = \#\{i \mid S \cong V^i\}$$

が成り立つ．示すべき主張はこれから直ちに従う． □

2.4 $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現の分類

定理 2.24. Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ の任意の有限次元表現 V は完全可約であり，既約表現 $V(n)$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) たちの直和に同型である．すなわち非負整数 $n_1, n_2, \ldots, n_d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が（順序の入れ替えを除いて一意的に）存在し，

$$V \cong V(n_1) \oplus V(n_2) \oplus \cdots \oplus V(n_d)$$

となる．

以下，この定理 2.24 の証明を与える．いくつか準備が必要である．

与えられた有限次元表現 $V = (V, \rho)$ に対して $E := \rho(e), F := \rho(f), H := \rho(h)$ とおく．これらは関係式 (2.4) を満たす．複素数 $c \in \mathbb{C}$ に対して，以下 $c \cdot \mathsf{id}_V$ を単に c と略記し，

$$V_c := \{v \in V \mid Hv = cv\} \quad \subset \quad V_{(c)} := \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t. } (H - c)^k v = 0\}$$

とおく．また

$$\mathrm{Spec}\, H := \{c \in \mathbb{C} \mid V_c \neq \{0\}\}$$

を H の固有値全体のなす有限集合とする．固有値 $c \in \operatorname{Spec} H$ に対し，V_c はその固有空間，$V_{(c)}$ はその広義固有空間である．線形代数学で習うように，V は H の広義固有空間の直和に分解する：

$$V = \bigoplus_{c \in \operatorname{Spec} H} V_{(c)}.$$

注意 2.25. 部分表現 $U \subset V$ について，次が成り立つ：

$$U_{(c)} = U \cap V_{(c)}, \qquad (V/U)_{(c)} \cong V_{(c)}/U_{(c)} \qquad (c \in \mathbb{C}).$$

補題 2.26. 任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し，以下が成り立つ：

$$E(V_c) \subset V_{c+2}, \qquad E(V_{(c)}) \subset V_{(c+2)}, \tag{2.7}$$

$$F(V_c) \subset V_{c-2}, \qquad F(V_{(c)}) \subset V_{(c-2)}. \tag{2.8}$$

特に，$k \geq \# \operatorname{Spec} H$ ならば $E^k = F^k = 0$ である．

Proof. 関係式 (2.4) から $HE = EH + 2E$ ゆえ，任意の $c \in \mathbb{C}$ について

$$(H - (c+2))E = HE - (c+2)E = EH + 2E - (c+2)E = E(H - c)$$

である．よって，任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$(H - (c+2))^k E = E(H - c)^k$$

が成り立つ．特に $v \in V$ が $(H - c)^k v = 0$ を満たすならば

$$(H - (c+2))^k Ev = E(H - c)^k v = 0$$

である．これから (2.7) が従う．(2.8) も同様に示される． □

一方，部分ベクトル空間 $V^e \subset V$ を

$$V^e \coloneqq \operatorname{Ker}(E) = \{v \in V \mid e \cdot v = E(v) = 0\}$$

と定める．このとき

$$H(V^e) \subset V^e \tag{2.9}$$

であることに注意しよう．実際，$v \in V^e$ ならば，関係式 $EH - HE = -2E$ より

$$EHv = EHv - HEv = -2Ev = 0$$

である．また補題 2.26 より E は冪零であるから

$$V^e = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad V = \{0\} \tag{2.10}$$

にも注意しておく．

補題 2.27. 任意の $v \in V^e$ と $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，以下の関係式が成り立つ：

$$EF^k v = kF^{k-1}(H-k+1)v, \tag{2.11}$$

$$E^k F^k v = k!H(H-1)(H-2)\cdots(H-k+1)v. \tag{2.12}$$

Proof. 証明は基本的に関係式 (2.4) を用いた計算による．まず (2.11) を k に関する帰納法で示す．$k=1$ のときは $Ev=0$ と関係式 $EF-FE=H$ より

$$EFv = EFv - FEv = Hv$$

だから良い．また k について関係式 (2.11) が正しいと仮定すると，

$$\begin{aligned}
EF^{k+1}v &= EFF^k v - FEF^k v + FEF^k v \\
&= HF^k v + F(kF^{k-1}(H-k+1))v \\
&= \sum_{j=1}^{k} F^{j-1}(HF-FH)F^{k-j}v + F^k Hv + kF^k(H-k+1)v \\
&= -2kF^k v + F^k Hv + kF^k(H-k+1)v \\
&= F^k(-2k+H+k(H-k+1))v \\
&= (k+1)F^k(H-k)v
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，2 つ目の等号で関係式 $EF-FE=H$, (2.9) および帰納法の仮定を，4 つ目の等号で関係式 $HF-FH=-2F$ を用いた．したがって帰納法により関係式 (2.11) が示された．関係式 (2.12) は，(2.9) に注意しながら (2.11) を繰り返し適用して

$$\begin{aligned}
E^k F^k v &= E^{k-1}(EF^k v) \\
&= kE^{k-1}F^{k-1}(H-k+1)v \\
&= k(k-1)E^{k-2}F^{k-2}(H-k+2)(H-k+1)v \\
&= \cdots \\
&= k!H(H-1)\cdots(H-k+2)(H-k+1)v
\end{aligned}$$

のように示すことができる． □

補題 2.28. 作用素 H の V^e への制限 $H|_{V^e}$ は対角化可能であり，その固有値は非負整数である．すなわち $V_n^e := V^e \cap V_n$ とおけば

$$V^e = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n^e$$

が成り立つ．さらに H の固有値はすべて整数，すなわち $\operatorname{Spec} H \subset \mathbb{Z}$ である．

Proof. $k \geq \#\operatorname{Spec} H$ のとき，任意の $v \in V^e$ に対して補題 2.26 と (2.12) より

$$0 = E^k F^k v = k! H(H-1)(H-2)\cdots(H-k+1)v$$

が成り立つ．これは $H|_{V^e}$ の最小多項式が多項式 $\prod_{j=0}^{k-1}(t-j)$ を割り切ることを導く．したがって $H|_{V^e}$ は対角化可能であり，その固有値は $\{0,1,2,\cdots,k-1\}$ に属する．これで前半の主張が示された．さらに任意の固有値 $c \in \operatorname{Spec} H$ と固有ベクトル $v \in V_c$ に対し，$m \coloneqq \max\{l \in \mathbb{Z}_{>0} \mid E^l v \neq 0\}$ とおけば，(2.7) より $E^m v \in V^e_{c+2m} \setminus \{0\}$ である．このとき前半の主張より $c + 2m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，したがって $c \in \mathbb{Z}$ である．これで後半の主張 $\operatorname{Spec} H \subset \mathbb{Z}$ も示された． □

補題 2.29. 任意の $v \in V^e_n \setminus \{0\}$ に対し

$$\langle v \rangle \coloneqq \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{v, Fv, F^2 v, \cdots, F^n v\}$$

は V の部分表現であり，既約表現 $V(n)$ と同型である．

Proof. $m \coloneqq \max\{k \mid F^k v \neq 0\}$ とすると，関係式 (2.11) より

$$0 = EF^{m+1}v = (m+1)F^m(H-m)v = (m+1)(n-m)F^m v$$

であるから，$m = n$ がわかる．よって特に $F\langle v \rangle \subset \langle v \rangle$ である．また (2.8) より 各 $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ について $F^k v \in V_{n-2k} \setminus \{0\}$ であるから $H\langle v \rangle \subset \langle v \rangle$ であり，集合 $\{F^k v \mid 0 \leq k \leq n\}$ は一次独立，したがって $\langle v \rangle$ の基底を与える．さらに関係式 (2.11) から，各 $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ について

$$EF^k v = kF^{k-1}(H-k+1)v = k(n-k+1)F^{k-1}v$$

であるから，$E\langle v \rangle \subset \langle v \rangle$ もわかる．ゆえに $\langle v \rangle$ は部分表現である．線型同型 $\varphi\colon V(n) \to \langle v \rangle$ を $\varphi(v_k) \coloneqq F^k v/k!$ と定めれば，φ が表現の同型を与えることが容易にわかる． □

さて，与えられた表現 V をより小さい表現の直和に分解することを考える．そのために Casimir 作用素を考えるのが便利である．

定義 2.30 (Casimir 作用素)**.** $\mathfrak{sl}_2$ の表現 $V = (V, \rho)$ に対し，付随する **Casimir 作用素** $C_V \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ を次の式で定義する：

$$C_V \coloneqq 2FE + \frac{1}{2}H(H+2) \qquad (E \coloneqq \rho(e), F \coloneqq \rho(f), H \coloneqq \rho(h)).$$

補題 2.31. 各 $X \in \{E, F, H\}$ に対し $C_V X = X C_V$，すなわち $C_V \in \operatorname{End}_{\mathfrak{sl}_2}(V)$ である．

レポート問題 12. 関係式 (2.4) を用いた計算により，補題 2.31 を確かめよ．

例 2.32. 例えば V が有限次元既約表現のとき，補題 2.31 と Schur の補題（補題 2.13）よりある $\gamma \in \mathbb{C}$ が存在して $C_V = \gamma \cdot \mathsf{id}_V$ となる．特に $V = V(n)$ のときは，$C_{V(n)} v_0 = \frac{1}{2} H(H+2) v_0 = \frac{n(n+2)}{2} v_0$ であるから $\gamma = \frac{n(n+2)}{2}$ である．

与えられた有限次元表現 V を，Casimir 作用素 C_V の広義固有空間の直和に分解する：

$$V = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{C}} V[\gamma], \qquad V[\gamma] := \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t. } (C_V - \gamma)^k v = 0\}.$$

このとき補題 2.31 より，各 $V[\gamma]$ は V の部分表現になる．したがって，ある $\gamma \in \mathbb{C}$ に対して $V = V[\gamma]$ となる場合を考察すれば十分である．

補題 2.33. 有限次元表現 V は $\{0\}$ でないとし，ある $\gamma \in \mathbb{C}$ について $V = V[\gamma]$ であると仮定する．このとき非負整数 n がただひとつ存在して

$$\gamma = \gamma_n := \frac{n(n+2)}{2}$$

となる．さらにこのとき $V^e = V_n = V_{(n)}$ となる．

Proof. 補題 2.28 より，分解 $V^e = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n^e$ がある．ここで $C_V|_{V_n^e} = \gamma_n \cdot \mathsf{id}_{V_n^e}$ であり，非負整数 n, n' について $n \neq n'$ ならば $\gamma_n \neq \gamma_{n'}$ なので，C_V がただひとつの固有値を持つという仮定より $V^e = V_n^e$ なる $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がただひとつ存在し，$\gamma = \gamma_n$ となる．このとき n は $\operatorname{Spec} H$ の最大値であるから $V_{(n)} \subset V^e$．ゆえに $V_n \subset V_{(n)} \subset V^e = V_n^e \subset V_n$ であり，したがって $V_n = V_{(n)} = V^e$ を得る． □

補題 2.34. 有限次元表現 V がある非負整数 n に対し $V = V[\gamma_n]$ を満たすとする．このとき表現の同型

$$V \cong V(n)^{\oplus \dim V_n}$$

が存在する．

Proof. $d := \dim V_n$ とおき，V_n の基底 $\{v^i\}_{1 \leq i \leq d}$ をひとつ選ぶ．補題 2.33 より $V_n = V_n^e$ だから，各 v^i に対して補題 2.29 を適用して，$\langle v^i \rangle = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{F^k v^i \mid 1 \leq k \leq n\}$ は $V(n)$ と同型な V の部分表現である．このとき集合 $\{F^k v^i \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq d\}$ は一次独立である．実際，$\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq d} \subset (V_n)^*$ を $\{v^i\}_{1 \leq i \leq d} \subset V_n$ の双対基底として，$\varphi_{k,i} \in V^*$ を $\varphi_{k,i}(v) := \frac{n!}{k!} \psi_i(E^k v)$ と定めれば，$\varphi_{k,i}(F^l v^j) = \delta_{(k,i),(l,j)}$ となる．したがって

$$U := \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{F^k v^i \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq d\} = \langle v^1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v^d \rangle$$

は $V(n)^{\oplus d}$ と同型な V の部分表現である．あとは $U = V$ を示せば良い．仮定 $V = V[\gamma_n]$ より，商表現 $\bar{V} := V/U$ も $\bar{V} = \bar{V}[\gamma_n]$ を満たす．$\bar{V}$ に補題 2.33 を適用して，注意 2.25 および $V_{(n)} = V_n = U_{(n)}$ と併せて

$$\bar{V}^e = \bar{V}_{(n)} \cong V_{(n)}/U_{(n)} = V_n/V_n = \{0\}$$

を得る．(2.10) より，これは $\bar{V} = \{0\}$，すなわち $U = V$ を導く． □

定理 2.24 の証明. 与えられた有限次元表現 V を，Casimir 作用素 C_V の広義固有空間の直和に分解すると，補題 2.33 より $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V[\gamma_n]$ となる．補題 2.34 より，各成分 $V[\gamma_n]$ は $V(n)$ の有限個のコピーの直和に同型である．ゆえに V は既約表現 $V(n)$ たちのいくつかの直和に同型であり，特に完全可約である．以上で定理 2.24 は証明された． □

注意 2.35. 任意の有限次元表現 $V = (V, \rho)$ について，定理 2.24 より結局 $H = \rho(h)$ および Casimir 作用素 C_V はどちらも対角化可能であることがわかる．

レポート問題 13 (表現 $V(n)$ の具体的実現)**.** 2 変数多項式環 $R = \mathbb{C}[x, y]$ 上の線型微分作用素 $E, F, H \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(R)$ を次の式で定義する：

$$E := x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad F := y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad H := x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

このとき以下を示せ．

(1) 写像 $\rho\colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(R)$ を

$$\rho\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} := aH + bE + cF \qquad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

と定めると，ρ は Lie 代数の準同型である．よって $R = (R, \rho)$ は Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ の表現となる．

(2) 各非負整数 n に対し，n 次斉次多項式全体の成す R の部分ベクトル空間 $R(n)$ は R の部分表現であり，§2.2 で定義した既約表現 $V(n)$ に同型である．

(3) 表現 R に付随する Casimir 作用素 $C_R \in \mathrm{End}_{\mathfrak{sl}_2}(R)$ は，Euler 作用素

$$\theta := x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

を用いて $C_R = \frac{1}{2}\theta(\theta + 2)$ と書ける．

定義 2.36 (表現の指標)**.** $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現 V に対し，その指標 $\chi(V)$ を，形式変数 z の Laurent 多項式として，次のように定義する：

$$\chi(V) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\dim V_n) z^n.$$

補題 2.37. 指標 $\chi(V)$ は以下の性質を満たす：

(1) $\mathfrak{sl}_2$ の任意の有限次元表現 V, V' に対し，

$$\chi(V \oplus V') = \chi(V) + \chi(V'). \tag{2.13}$$

(2) 任意の非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\chi(V(n)) = z^n + z^{n-2} + \cdots + z^{-n+2} + z^{-n} = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}}. \tag{2.14}$$

Proof. (2.13) は任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $(V \oplus V')_n = V_n \oplus V'_n$ であることから，(2.14) は既約表現 $V(n)$ の構成からわかる． □

系 2.38. $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現 V, V' に対し，次が成り立つ：

$$\text{表現として } V \cong V' \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(V) = \chi(V').$$

すなわち，$\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現は（同型を除いて）その指標だけから決まる．

Proof. ($\Longrightarrow$) は，表現の同型 $V \cong V'$ が任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ について固有空間の線型同型 $V_n \cong V'_n$ を導くことから従う．($\Longleftarrow$) は次のように示される：定理 2.24 より $V \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V(n)^{\oplus d_n}$, $V' \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V(n)^{\oplus d'_n}$ と分解する．このとき (2.13) より

$$\chi(V) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} d_n \chi(V(n)), \qquad \chi(V') = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} d'_n \chi(V(n))$$

である．(2.14) より，集合 $\{\chi(V(n)) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は 1 変数 Laurent 多項式のなすベクトル空間 $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ において一次独立である．ゆえに，$\chi(V) = \chi(V')$ ならば各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $d_n = d'_n$ となり，したがって表現として $V \cong V'$ である． □

3　半単純 Lie 代数とその構造

ここまで，Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現について論じてきたが，そこでは既約表現が非負整数によってパラメトライズされ，一般の表現について完全可約性が成り立っていた．$\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現論におけるこのようなきれいな性質は，有限次元半単純 Lie 代数と呼ばれるクラスの Lie 代数の有限次元表現論にまで一般化される．このことを説明することが，本講義の残りのパートのひとつの目標である．

そこでこの節ではまず半単純 Lie 代数を定義し，その構造について説明する．以下，簡単のため，Lie 代数といえば常に有限次元複素 Lie 代数を意味するものとする．

3.1　イデアルと半単純 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ に対し，

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{[x, y] \mid x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\} \tag{3.1}$$

と書く．定義よりこれは $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間である．Lie 括弧の反対称性から $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$ であることに注意しよう．

定義 3.1 (部分 Lie 代数/イデアル)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{a}$ は

(1) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ を満たすとき，$\mathfrak{g}$ の**部分 Lie 代数** (Lie subalgebra) であるといい，
(2) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ を満たすとき，$\mathfrak{g}$ の**イデアル** (ideal) であるという．

Lie 代数のイデアルは，群の正規部分群に対応する概念である．$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであるとき，商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は自然に Lie 代数となる．実際，$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の Lie 括弧を

$$[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] \coloneqq [x, y] + \mathfrak{a} \qquad (x, y \in \mathfrak{g})$$

と定義すれば，$\mathfrak{a}$ がイデアルであることからこれは well-defined（実際，$x - x', y - y' \in \mathfrak{a}$ のとき $[x, y] - [x', y'] = [x - x', y] + [x', y - y'] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ となるので，代表元のとり方に依らない）であって，反対称性および Jacobi 恒等式を満たすことがわかる．

補題 3.2 (準同型定理)**.** Lie 代数の準同型 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ について，

(1) $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，$\mathrm{Im}\,\varphi$ は $\mathfrak{g}'$ の部分 Lie 代数である；
(2) φ は Lie 代数の自然な同型 $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$ を導く．

Proof. 群の準同型定理と同様に証明できる（ので，ここでは証明略）. □

注意 3.3. 例えば随伴表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ を与える準同型写像 $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の核

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \coloneqq \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**中心** (center) と呼ぶ．より一般に $\mathfrak{g}$ の表現 (V, ρ) に対して $\mathrm{Ker}(\rho) \subset \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．$\mathrm{Ker}(\rho) = \{0\}$ なるとき，表現 (V, ρ) は**忠実** (faithful) であるという.

定義 3.4 (可換 Lie 代数/単純 Lie 代数)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は

(1) Lie 括弧が自明，すなわち $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$ なるとき**可換** (commutative) であるといい，
(2) 非可換かつ $\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ 以外にイデアルを持たないとき，**単純** (simple) であるという.

注意 3.5. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアルとは随伴表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ の部分表現のことにほかならない．よって，次のように言い換えられる：

- $\mathfrak{g}$ が可換 $\Longleftrightarrow$ 随伴表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ が自明,
- $\mathfrak{g}$ が単純 $\Longleftrightarrow$ 随伴表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ が非自明かつ既約.

例 3.6. 任意の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，その中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ は可換である.

例 3.7. Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ は単純である．実際，その随伴表現 $(\mathfrak{sl}_2, \mathrm{ad})$ は 3 次元既約表現 $V(2)$ と同型であることをすでに見た．実は後ほど説明する単純 Lie 代数の分類結果により，$\mathfrak{sl}_2$ は最小の単純 Lie 代数であることが分かる．すでに登場した Lie 代数の中で $\mathfrak{sl}_n$ $(n \geq 2)$ および $\mathfrak{so}_n$ $(n \geq 3)$ は単純 Lie 代数である（後で詳しく見る）.

例 3.8. 一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n$ は単純 Lie 代数でない．実際，その中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n) = \mathbb{C} \cdot I_n$ はスカラー行列全体のなす 1 次元可換イデアルである.

レポート問題 14. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が単純ならば $\dim \mathfrak{g} \geq 3$ であることを示せ.

定義 3.9 (Lie 代数の直和)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_d$ に対し，ベクトル空間の直和

$$\bigoplus_{i=1}^{d} \mathfrak{g}_i = \left\{ \sum_{i=1}^{d} x_i \;\middle|\; x_i \in \mathfrak{g}_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, d\} \right\}$$

は，双線形写像

$$\left[\sum_{i=1}^{d} x_i, \sum_{i=1}^{d} y_i\right] := \sum_{i=1}^{d} [x_i, y_i] \qquad (x_i, y_i \in \mathfrak{g}_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, d\})$$

を Lie 括弧として Lie 代数となる．これを Lie 代数の**直和**という．このとき，各 $\mathfrak{g}_i$ は自然に $\bigoplus_{i=1}^{d} \mathfrak{g}_i$ の部分ベクトル空間とみなせるが，$i \neq j$ ならば $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$ であることに注意する．特に，各 $\mathfrak{g}_i$ は $\bigoplus_{i=1}^{d} \mathfrak{g}_i$ のイデアルになっている．

定義 3.10 (半単純 Lie 代数)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ はいくつかの単純 Lie 代数の直和として書けるとき，すなわち単純イデアル $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_d \subset \mathfrak{g}$ が存在して $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathfrak{g}_i$ となるとき，**半単純** (semi-simple) であるという[*17].

注意 3.11. 単純 Lie 代数はもちろん半単純である（$d = 1$ の場合）.

例 3.12. 一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n$ は，Lie 代数として $\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n) \oplus \mathfrak{sl}_n$ と直和分解するが，$\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n) = \mathbb{C} \cdot I_n$ が可換である（特に単純でない）ことから，<u>半単純でない</u>.

レポート問題 15. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が半単純であることと，随伴表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ が忠実かつ完全可約であることは同値であることを示せ.

3.2 反傾表現と不変対称双線型形式

次に有限次元 Lie 代数の半単純性に関する Cartan の判定条件 (= 定理 3.23) について説明する．それは $\mathfrak{g}$ 上の不変双線型形式を用いて述べられるので，ここでは準備として不変双線型形式について説明する.

定義 3.13 (反傾表現)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V に対し，その双対空間

$$V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$$

に $\mathfrak{g}$ の表現の構造を

$$(xf)(v) := -f(xv) \qquad (x \in \mathfrak{g}, f \in V^*, v \in V)$$

[*17] 半単純 Lie 代数には複数の互いに同値な定義が存在するので，文献を参照する際には注意が必要である．特にこの講義ノートでの定義は，より伝統的な「$\{0\}$ でない可解イデアルを持たない」という定義とは異なる．異なる複数の定義が互いに同値であることは非自明な事実であり，普通はいわゆる Cartan の判定条件（定理 3.23 参照）を用いて証明される.

によって定めることができる．実際，任意の $x, y \in \mathfrak{g}$, $f \in V^*$, $v \in V$ について

$$\begin{aligned}([x,y]f)(v) &= -f([x,y]v) \\ &= -f(x(yv)) + f(y(xv)) \\ &= (xf)(yv) - (yf)(xv) \\ &= -(y(xf))(v) + (x(yf))(v) \\ &= (x(yf) - y(xf))(v)\end{aligned}$$

より，$[x,y]f = x(yf) - y(xf)$ となり，(2.2) は満たされる．こうして得られる $\mathfrak{g}$ の表現 V^* を V の**反傾表現** (contragredient representation) もしくは**双対表現** (dual representation) という．

補題 3.14. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 V について，次が成り立つ：

$$V \text{ が既約} \quad \Longleftrightarrow \quad V^* \text{ が既約}.$$

Proof. 有限次元ベクトル空間 V に対して，自然な線型同型 $V \cong (V^*)^*$ があったことを思い出そう．V が $\mathfrak{g}$ の有限次元表現のとき，この同型 $V \cong (V^*)^*$ は表現としての同型を与える．以下この同型を介して V と $(V^*)^*$ を同一視する．部分表現 $U \subset V$ に対し，$U^\perp \coloneqq \{f \in V^* \mid f(u) = 0, \forall u \in U\}$ は V^* の部分表現である．実際，任意の $x \in \mathfrak{g}$ と $f \in U^\perp$ について，$u \in U$ ならば $(xf)(u) = -f(xu) = 0$, すなわち $xf \in U^\perp$ である．また部分表現 $(U^\perp)^\perp \subset (V^*)^* = V$ は U に等しい．実際，明らかな包含 $U \subset (U^\perp)^\perp$ があるが，$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ に注意すれば $\dim U = \dim (U^\perp)^\perp$ が従う．ゆえに対応 $U \leftrightarrow U^\perp$ は，V の部分表現の集合と V^* の部分表現の集合の間の全単射を引き起こす．したがって V の既約性と V^* の既約性は同値である． □

次に対称双線型形式について復習しよう．ベクトル空間 V に対し，双線形写像

$$B \colon V \times V \to \mathbb{C}$$

であって，条件 $B(u,v) = B(v,u)$ $(\forall u, v \in V)$ を満たすものを V 上の**対称双線型形式** (symmetric bilinear form) と呼ぶ．このとき V の部分ベクトル空間

$$\operatorname{rad} B \coloneqq \{v \in V \mid B(v,u) = 0, \forall u \in V\}$$

を B の**根基** (radical) という．$\operatorname{rad} B = \{0\}$ なるとき B は**非退化** (non-degenerate) であるという．これは双対空間 V^* を用いて以下のように言い換えられる．V 上の対称双線型形式 B に対し，線形写像 $\nu_B \colon V \to V^*$ が

$$\nu_B(v)(u) \coloneqq B(v,u) \qquad (v, u \in V) \tag{3.2}$$

によって定まる．このとき

$$\operatorname{rad} B = \operatorname{Ker}(\nu_B)$$

である．ゆえに，B が非退化であることと，ν_B が単射であることは同値である．特に V が有限次元ならば，B が非退化であることと，ν_B が線型同型 $V \xrightarrow{\simeq} V^*$ であることは同値である．

注意 3.15. 有限次元ベクトル空間 V 上の非退化対称双線型形式 B と V の基底 $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ が与えられたとき，V の別の基底 $\{v_i'\}_{1\le i\le n}$ で

$$B(v_i, v_j') = \delta_{i,j} \qquad (\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$$

を満たすものが一意的に存在する．実際，$\{v_i^*\}_{1\le i\le n} \subset V^*$ を $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ の双対基底として，$v_i' \coloneqq \nu_B^{-1}(v_i^*)$ とおけば上の条件を満たすものとして一意的に決まる．

定義 3.16 ($\mathfrak{g}$ 不変形式)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V 上の対称双線型形式 $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ は条件

$$B(xv, u) + B(v, xu) = 0 \qquad (\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall v, u \in V) \tag{3.3}$$

を満たすとき，$\mathfrak{g}$ **不変** ($\mathfrak{g}$-invariant) であるという．

注意 3.17. 条件式は群の場合と比較するとわかりやすい．群 G の表現 V 上の双線型形式 $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ は条件

$$B(gv, gu) = B(v, u) \qquad (\forall g \in G,\ \forall v, u \in V) \tag{3.4}$$

を満たすとき，G 不変であるという．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が Lie 群 G から来ているとき，条件式 (3.3) は条件式 (3.4) を微分して得られる．すなわち (3.4) において $g = \exp(tx)$, $x \in \operatorname{Lie} G$ とすれば

$$B(\exp(tx)v, \exp(tx)u) = B(v, u)$$

となるが，この両辺を t について微分して $t = 0$ とおくことで条件式 (3.3) を得る．

補題 3.18. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V 上の対称双線型形式 B について，B が $\mathfrak{g}$ 不変であることと，対応する線型写像 $\nu_B\colon V \to V^*$ が表現の準同型であることは同値である．

Proof. 条件 (3.3) を B に付随する線形写像 $\nu_B\colon V \to V^*$ を用いて

$$\nu_B(xv)(u) = -\nu_B(v)(xu) = (x \cdot \nu_B(v))(u) \qquad (\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall v, u \in V)$$

と書き換えることができる．これは

$$\nu_B(x \cdot v) = x \cdot \nu_B(v) \qquad (\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V),$$

すなわち ν_B が準同型であることと同値である． □

命題 3.19. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 V について，V 上の任意の 0 でない $\mathfrak{g}$ 不変対称双線型形式は非退化であり，$\mathbb{C}$ 倍を除いて一意的である[*18]．

Proof. V 上の $\mathfrak{g}$ 不変対称双線型形式 B が与えられたとする．このとき補題 3.18 より対応する線形写像 $\nu_B\colon V \to V^*$ は $\mathfrak{g}$ 準同型である．V は有限次元既約表現と仮定しているので，補題 3.14 より V^* も有限次元既約表現である．よって Schur の補題 (= 定理 2.14) より，$B \neq 0$ ならば ν_B は同型，すなわち B は非退化である．最後の一意性も Schur の補題から従う． □

3.3 Killing 形式と Cartan の判定条件

ここでは随伴表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ に着目し，$\mathfrak{g}$ 上の随伴作用に関する $\mathfrak{g}$ 不変対称双線型形式，すなわち対称双線型形式 $B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ であって，条件

$$B([x,y],z) + B(y,[x,z]) = 0 \qquad (\forall x, y, z \in \mathfrak{g}). \tag{3.5}$$

を満たすものの具体的構成について考える．

まず線形写像のトレースについて手短に復習しよう．n 次正方行列 $A = (A_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対し，その対角成分の和 $\mathrm{tr}(A) \coloneqq \sum_{i=1}^n A_{ii}$ を A のトレースと呼ぶのだった．$A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{1 \le i,j \le n} A_{ij} B_{ji} = \mathrm{tr}(BA) \tag{3.6}$$

が成り立つ．より一般に有限次元ベクトル空間 V の自己線形写像 $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ に対して，そのトレースを

$$\mathrm{tr}_V(f) \coloneqq \mathrm{tr}(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi) \tag{3.7}$$

によって定義する．ここで φ は任意の線型同型 $\varphi\colon \mathbb{C}^n \xrightarrow{\simeq} V$ であり，右辺は正方行列 $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ の通常のトレースである．別の線型同型 $\psi\colon \mathbb{C}^n \xrightarrow{\simeq} V$ を取ったとき，$P \coloneqq \psi^{-1} \circ \varphi \in GL_n(\mathbb{C})$ とおけば，(3.6) より

$$\mathrm{tr}(\psi^{-1} \circ f \circ \psi) = \mathrm{tr}(P \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ P^{-1}) = \mathrm{tr}(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)$$

[*18] ただし 0 でない $\mathfrak{g}$ 不変対称双線型形式は必ずしも存在するとは限らない．

となるので，(3.7) の右辺は線型同型 φ のとり方に依らず一定ゆえ $\mathrm{tr}_V(f)$ は well-defined である．(3.6) より，任意の $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ に対して次が成り立つ：

$$\mathrm{tr}_V(f \circ g) = \mathrm{tr}_V(g \circ f). \tag{3.8}$$

補題 3.20. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $V = (V, \rho)$ に対し，写像 $B_V \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ を

$$B_V(x, y) \coloneqq \mathrm{tr}_V(\rho(x) \circ \rho(y)) \qquad (x, y \in \mathfrak{g})$$

と定義すれば，B_V は $\mathfrak{g}$ 上の随伴作用 ad に関する $\mathfrak{g}$ 不変対称双線型形式を与える．

Proof. B_V の双線型性は構成から明らか，対称性は (3.8) から従う．$\mathfrak{g}$ 不変性 (3.5) は，

$$\begin{aligned}
B_V([x, y], z) &= \mathrm{tr}_V(\rho([x, y]) \circ \rho(z)) \\
&= \mathrm{tr}_V((\rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x)) \circ \rho(z)) && (\because (2.2)) \\
&= \mathrm{tr}_V(\rho(x) \circ \rho(y) \circ \rho(z)) - \mathrm{tr}_V(\rho(y) \circ \rho(x) \circ \rho(z)) \\
&= \mathrm{tr}_V(\rho(y) \circ \rho(z) \circ \rho(x)) - \mathrm{tr}_V(\rho(y) \circ \rho(x) \circ \rho(z)) && (\because (3.8)) \\
&= -\mathrm{tr}_V(\rho(y) \circ \rho([x, z])) \\
&= -B_V(y, [x, z])
\end{aligned}$$

と確かめられる． □

例 3.21 ($\mathfrak{sl}_2$ の例)**.** 非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し，$\mathfrak{sl}_2$ の既約表現 $V(n) = (V(n), \rho)$ に対して，双線型形式 $B_{V(n)}$ を計算してみよう．$E \coloneqq \rho(e), F \coloneqq \rho(f), H \coloneqq \rho(h)$ は (2.5) で与えられるので，$B_{V(n)}(e, e) = B_{V(n)}(f, f) = B_{V(n)}(h, e) = B_{V(n)}(h, f) = 0$ であり，

$$B_{V(n)}(h, h) = \mathrm{tr}_{V(n)}(H^2) = \sum_{k=0}^{n} (n - 2k)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$
$$B_{V(n)}(e, f) = \mathrm{tr}_{V(n)}(EF) = \sum_{k=0}^{n} (n - k)(k + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

となる．よって $n > 0$ ならば $B_{V(n)}$ は非退化である．また $B_{V(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} B_{V(1)}$ もわかり，確かに命題 3.19 の主張（$V = \mathfrak{sl}_2$ の場合）と整合している．

定義 3.22 (Killing 形式)**.** 任意の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，その随伴表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ について補題 3.20 の構成を適用して，$\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$ 不変対称双線型形式 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ を

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) \coloneqq \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y))$$

と定義する．$\kappa_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** (Killing form) と呼ぶ．

定理 3.23 (Cartan の判定条件)**.** 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，次が成り立つ：

$$\mathfrak{g} \text{ が半単純} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Killing 形式 } \kappa_{\mathfrak{g}} \text{ が非退化.}$$

時間的制約により，残念ながら本講義では定理 3.23 の証明を省略する．興味のある人は [2, §5] または [1, §C.1] などを参照.

例 3.24. $\mathfrak{sl}_2$ の場合，$(\mathfrak{sl}_2, \mathrm{ad}) \cong V(2)$ だったので $\kappa_{\mathfrak{sl}_2} = B_{V(2)}$ である．例 3.21 より

$$\kappa_{\mathfrak{sl}_2}(e,e) = \kappa_{\mathfrak{sl}_2}(f,f) = \kappa_{\mathfrak{sl}_2}(h,e) = \kappa_{\mathfrak{sl}_2}(h,f) = 0, \quad \kappa_{\mathfrak{sl}_2}(h,h) = 8, \quad \kappa_{\mathfrak{sl}_2}(e,f) = 4$$

であり，これは確かに非退化である.

レポート問題 16. Lie 代数の直和 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathfrak{g}_i$ の Killing 形式について，次を示せ：

$$\kappa_{\mathfrak{g}}\left(\sum_{i=1}^{d} x_i, \sum_{i=1}^{d} y_i\right) = \sum_{i=1}^{d} \kappa_{\mathfrak{g}_i}(x_i, y_i) \qquad (x_i, y_i \in \mathfrak{g}_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, d\}).$$

3.4 可換 Lie 代数のウェイト表現

次なる目的は半単純 Lie 代数の構造を記述することである．ここではそのための準備として可換 Lie 代数のウェイト表現に関する基本的な事実を述べる．またその応用として特殊線型 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n$ の単純性を証明し，その Killing 形式を計算する.

以下，$\mathfrak{h}$ を有限次元可換 Lie 代数とし，V をその（有限次元とは限らない）表現とする．$\mathfrak{h}$ の双対空間の元 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，部分ベクトル空間 $V_\lambda \subset V$ を

$$V_\lambda \coloneqq \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

と定義する．$V_\lambda \neq \{0\}$ であるとき，λ は V の**ウェイト** (weight) であるといい，V_λ をその**ウェイト空間**，ベクトル $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ をその**ウェイトベクトル**という.

補題 3.25. 可換 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の表現 V, V' の間の準同型 $\varphi\colon V \to V'$ は次を満たす：

$$\varphi(V_\lambda) \subset V'_\lambda \qquad (\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*).$$

Proof. $v \in V_\lambda$ ならば

$$h \cdot \varphi(v) = \varphi(h \cdot v) = \varphi(\lambda(h)v) = \lambda(h)\varphi(v)$$

である．すなわち $\varphi(v) \in V'_\lambda$ である． □

補題 3.26. ウェイト空間の和は直和である．すなわち，$\mathfrak{h}$ の任意の表現 V について

$$\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

が成り立つ．

Proof. 任意の互いに相異なる有限個のウェイト $\lambda_1,\dots,\lambda_l \in \mathfrak{h}^*$ とベクトル $v_i \in V_{\lambda_i}$, $1 \le i \le l$, について，$v := v_1 + \cdots + v_l = 0$ ならば $v_1 = \cdots = v_l = 0$ を示せば良い．l に関する帰納法による．$l = 1$ のときは自明．$l > 1$ のとき，任意の $h \in \mathfrak{h}$ について

$$0 = h \cdot v - \lambda_1(h)v = \sum_{i=2}^{l} (\lambda_i - \lambda_1)(h)v_i$$

である．帰納法の仮定より各 $i \in \{2,\dots,l\}$ について $(\lambda_i - \lambda_1)(h)v_i = 0$ である．各 $i \in \{2,\dots,l\}$ に対して $\lambda_i \neq \lambda_1$ だから，$h \in \mathfrak{h}$ を $(\lambda_i - \lambda_1)(h) \neq 0$ なるように選べるので，$v_i = 0$ が従う．このとき $v_1 = v - (v_2 + \cdots + v_l) = 0$ も従い，主張は示された． □

定義 3.27 (ウェイト表現)**.** 可換 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の表現 V は，ベクトル空間 V がウェイト空間の和であるとき，すなわち

$$V = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

のとき，**ウェイト表現**であるという．（ここで 2 つ目の等号は補題 3.26 から常に従う．）

補題 3.28. V は可換 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ のウェイト表現であるとする．このとき V の任意の部分表現 $U \subset V$ および商表現 V/U はまたウェイト表現であって，次が成り立つ：

$$U_\lambda = U \cap V_\lambda, \qquad (V/U)_\lambda \cong V_\lambda/U_\lambda \qquad (\forall\lambda \in \mathfrak{h}^*).$$

Proof. $U \subset V$ を部分表現とする．等式 $U_\lambda = U \cap V_\lambda$ は定義より明らか．$\pi\colon V \to V/U$ を商写像とすると，

$$V/U = \pi(V) = \pi\left(\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \pi(V_\lambda) \subset \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} (V/U)_\lambda$$

である．ここで最後の包含は補題 3.25 による．よって $V/U = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}(V/U)_\lambda$ はウェイト表現であり，π は線型同型 $(V/U)_\lambda \cong V_\lambda/(U \cap V_\lambda) = V_\lambda/U_\lambda$ を導く．

U がウェイト表現であることを示そう．補題 3.26 より，任意のベクトル $v \in U$ は $v = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} v_\lambda$ $(v_\lambda \in V_\lambda)$ の形に一意的に表せる．このとき任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について

$v_\lambda \in U_\lambda$ を言えば良い．$v \in U$ だから $0 = \pi(v) = \sum_\lambda \pi(v_\lambda)$ であるが，補題 3.25 より各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\pi(v_\lambda) \in (V/U)_\lambda$ である．補題 3.26 より，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について $\pi(v_\lambda) = 0$，すなわち $v_\lambda \in U \cap V_\lambda = U_\lambda$ がわかる． □

レポート問題 17. $\mathfrak{h}$ を有限次元可換 Lie 代数とする．各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を Lie 代数の準同型 $\lambda\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{C} = \mathfrak{gl}(\mathbb{C})$ とみなすことによって $\mathfrak{h}$ の 1 次元表現 $(\mathbb{C}, \lambda)$ が定まる．以下を示せ：

(1) 集合 $\{(\mathbb{C}, \lambda) \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*\}$ は $\mathfrak{h}$ の有限次元既約表現の同型類の完全代表系を与える．

(2) $\mathfrak{h}$ の有限次元表現 V について，V がウェイト表現であることと V が完全可約であることは同値である．

例 3.29 ($\mathfrak{sl}_n$ の単純性の証明と Killing 形式の計算)**.** Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n$ を考えよう．これはトレースが 0 であるような n 次正方行列全体

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

のなす $\mathfrak{gl}_n$ の部分 Lie 代数であった．定義より $\dim \mathfrak{sl}_n = n^2 - 1$ であり，その基底として

$$\{E_{i,j} \mid 1 \le i \ne j \le n\} \cup \{H_i \coloneqq E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \mid 1 \le i < n\} \tag{3.9}$$

がとれる．ここで $E_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ は (i,j) 成分 1，それ以外の成分が 0 であるような n 次正方行列（いわゆる行列単位）である．なお行列単位同士の交換子は次のようになる：

$$[E_{i,j}, E_{k,l}] = \delta_{j,k} E_{i,l} - \delta_{i,l} E_{k,j} \qquad (1 \le i, j, k, l \le n). \tag{3.10}$$

さて，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_n$ を対角行列の全体

$$\mathfrak{h} \coloneqq \{\textstyle\sum_{i=1}^n a_i E_{i,i} \mid (a_i) \in \mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^n a_i = 0\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{H_i \mid 1 \le i < n\}$$

とすると，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{sl}_n$ の可換部分 Lie 代数，$\dim \mathfrak{h} = n-1$ である．随伴作用 $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_n)$ によって $\mathfrak{sl}_n$ を可換 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の表現と見なすとき，$\mathfrak{sl}_n$ は $\mathfrak{h}$ のウェイト表現である．実際，各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し，双対空間の元 $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\varepsilon_i(\textstyle\sum_{j=1}^n a_j E_{j,j}) \coloneqq a_i$$

によって定義すれば，式 (3.10) より任意の $h \in \mathfrak{h}$ について $[h, E_{i,j}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) E_{i,j}$ が分かる．よって次のようなウェイト空間の直和への分解を得る：

$$\mathfrak{sl}_n = (\mathfrak{sl}_n)_0 \oplus \bigoplus_{1 \le i \ne j \le n} (\mathfrak{sl}_n)_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}, \qquad (\mathfrak{sl}_n)_0 = \mathfrak{h}, \qquad (\mathfrak{sl}_n)_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathbb{C} E_{i,j}. \tag{3.11}$$

命題 3.30. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ について，Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n$ は単純である．

Proof. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}_n$ を $\{0\}$ でないイデアルとするとき，$\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_n$ であることを示せば良い．$\mathfrak{a}$ は随伴表現 $(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{ad})$ の部分表現であるから，特に $\mathfrak{h}$ の随伴作用で保たれる．上で見たように $\mathfrak{h}$ 表現として $\mathfrak{sl}_n$ はウェイト表現だったから，補題 3.28 よりその部分表現である $\mathfrak{a}$ も $\mathfrak{h}$ のウェイト表現であり，ウェイト空間の直和に分解する．分解 (3.11) より，特に

(a) $\mathfrak{a} \in E_{i,j}$ なる $1 \leq i \neq j \leq n$ が存在する，もしくは
(b) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$

の少なくとも一方が成立する．(a) のとき，任意の $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$ について $E_{k,j} = [E_{k,i}, E_{i,j}]$ および $E_{i,k} = [E_{i,j}, E_{j,k}]$ はともに $\mathfrak{a}$ に属する．さらに任意の $l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, k\}$ について $E_{k,l} = [E_{k,j}, E_{j,l}] \in \mathfrak{a}$，また任意の $l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, k\}$ について $E_{l,k} = [E_{l,i}, E_{i,k}] \in \mathfrak{a}$ も言える．すなわち $1 \leq k \neq l \leq n$ かつ $(k, l) \neq (j, i)$ ならば $E_{k,l} \in \mathfrak{a}$ がわかった．一方で $[E_{j,i}, [E_{j,i}, E_{i,j}]] = [E_{i,j}, E_{j,j} - E_{i,i}] = -2E_{j,i} \in \mathfrak{a}$ であるから $E_{j,i} \in \mathfrak{a}$．結局すべての $1 \leq k \neq l \leq n$ について $E_{k,l} \in \mathfrak{a}$ が分かった．このとき $E_{k,k} - E_{l,l} = [E_{k,l}, E_{l,k}] \in \mathfrak{a}$ だから，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}$．ゆえに $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_n$ を得る．(b) のときは，0 でない元 $h \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ について，ある $1 \leq i \neq j \leq n$ が存在して $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) \neq 0$ となる．このとき $E_{i,j} = [h, E_{i,j}]/(\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) \in \mathfrak{a}$ となり，(a) の場合に帰着する． □

次に $\mathfrak{sl}_n$ の Killing 形式を計算しよう．ただ定義に従って直接計算するのではなく，命題 3.19 を援用して賢く計算したい．そこでまずベクトル表現 $\mathbb{C}^n$ に付随する不変形式 $B_{\mathbb{C}^n}$ を考える．これは単に通常の行列の積のトレース，すなわち

$$B_{\mathbb{C}^n}(x, y) \coloneqq \mathrm{tr}(xy) \qquad (x, y \in \mathfrak{sl}_n)$$

で定義される $\mathfrak{sl}_n$ 上の不変対称双線型形式であって，容易に直接計算ができる．標準的な基底 (3.9) の元に対するその値は

$$B_{\mathbb{C}^n}(E_{i,j}, E_{k,l}) = \begin{cases} 1 & (k, l) = (j, l) \text{ のとき}, \\ 0 & \text{それ以外のとき}, \end{cases}$$

$$B_{\mathbb{C}^n}(H_i, H_j) = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき}, \\ -1 & |i - j| = 1 \text{ のとき}, \\ 0 & |i - j| > 1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$B_{\mathbb{C}^n}(H_i, E_{k,l}) = 0$$

となる．特に $B_{\mathbb{C}^n} \neq 0$ だから，命題 3.19 より $B_{\mathbb{C}^n}$ は非退化であり，Killing 形式 $\kappa_{\mathfrak{sl}_n}$ は $B_{\mathbb{C}^n}$ のスカラー倍，すなわち $\kappa_{\mathfrak{sl}_n} = cB_{\mathbb{C}^n}$ なる $c \in \mathbb{C}$ が存在する．スカラー c を計算す

るには例えば $\kappa_{\mathfrak{sl}_n}(H_1, H_1)$ を計算して $B_{\mathbb{C}^n}(H_1, H_1) = 2$ と比較すれば良い．分解 (3.11) を用いて計算すれば

$$\kappa_{\mathfrak{sl}_n}(H_1, H_1) = \sum_{1 \le i \ne j \le n} (\varepsilon_i(H_1) - \varepsilon_j(H_1))^2 = 2 \sum_{1 \le i < j \le n} (\varepsilon_i(H_1) - \varepsilon_j(H_1))^2 = 4n$$

となる．したがって $c = 2n$，よって $\kappa_{\mathfrak{sl}_n} = 2nB_{\mathbb{C}^n}$ を得る．

3.5 Cartan 部分代数とルート空間分解

定義 3.31 (Cartan 部分代数)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ は，以下の 2 条件を満たすとき **Cartan 部分代数** (Cartan subalgebra) であるという：

(1) $\mathfrak{h}$ は冪零，すなわち十分大きい $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ をとれば任意の $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{h}$ に対して $(\mathrm{ad}(x_1) \circ \mathrm{ad}(x_2) \circ \cdots \circ \mathrm{ad}(x_n))(\mathfrak{h}) = 0$ となる．

(2) 元 $x \in \mathfrak{g}$ について，$\mathrm{ad}(x)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ ならば $x \in \mathfrak{h}$ である．

Cartan 部分代数の次元 $\dim \mathfrak{h}$ を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**階数** (rank) と呼び，$\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ と書く．次の事実 3.32 により $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ は well-defined である．

事実 3.32. 任意の有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数は存在し，$\mathfrak{g}$ の自己同型による共役を除いて一意的である．すなわち，2 つの Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$ が与えられたとき，Lie 代数の自己同型 $\phi\colon \mathfrak{g} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}$ が存在して，$\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ となる．

本講義では事実 3.32 の証明を述べる余裕がないので省略する．興味があれば [2, §§15–16] などを参照されたい．

レポート問題 18. 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ に対し $\mathrm{rk}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} + \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}'$ を示せ．

例 3.33. Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n$ について，例 3.29 で対角行列のなす可換部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_n$ を考えたが，この $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{sl}_n$ の Cartan 部分代数である．特に $\mathrm{rk}\,\mathfrak{sl}_n = n - 1$ である．

より一般に次が成り立つ．

定理 3.34. 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ について，以下の条件 (i) と (ii) は互いに同値である：

(i) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．

(ii) $\mathfrak{h}$ は可換 Lie 代数であって，以下を満たす：

- 随伴作用 $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{h}$ の表現とみなしたとき，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{h}$ のウェイト表現である．すなわち，次の直和分解がある：

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{g}_\alpha \coloneqq \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}. \tag{3.12}$$

- 上の分解 (3.12) において，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ である．言い換えると，元 $x \in \mathfrak{g}$ について $[x, \mathfrak{h}] = \{0\}$ ならば $x \in \mathfrak{h}$ である．

Proof. [(i) $\Longrightarrow$ (ii)] の証明は本講義では省略する（興味があれば例えば [2, §§8.1, 8.2, 15.3] などを参照）．[(ii) $\Longrightarrow$ (i)] は次のように簡単に示される：$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が (ii) の条件を満たす可換部分 Lie 代数であるとする．$\mathfrak{h}$ は可換だから特に冪零である．元 $x \in \mathfrak{g}$ が $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ を満たすとき $x \in \mathfrak{h}$ であることを示す．分解 (3.12) より $x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} x_\alpha$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, と一意的に表せる．$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ だから，このとき任意の $\alpha \neq 0$ に対して $x_\alpha = 0$ を示せば良い．仮定 $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ より，任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対し $[h, x] = \sum_{\alpha \neq 0} \alpha(h) x_\alpha \in \mathfrak{h}$ である．よって再び分解 (3.12) より，任意の $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ と $h \in \mathfrak{h}$ について $\alpha(h)x_\alpha = 0$ が成り立つ．任意に与えられた $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ に対し，$h \in \mathfrak{h}$ をうまく選べば $\alpha(h) \neq 0$ となるので，$\alpha \neq 0$ ならば $x_\alpha = 0$ でなくてはならない．したがって $x = x_0 \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ を得る． □

以下，$\mathfrak{g}$ は半単純であるとし，その Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ をひとつ選んで固定する．このとき記法 (3.12) の下で，$\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ なる元 $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ を**ルート** (root) と呼び，$\mathfrak{g}_\alpha$ を**ルート空間**，その非零元 $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ を**ルートベクトル**と呼ぶ．また

$$\Delta \coloneqq \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$$

でルート全体の集合を表す．Δ は $\mathfrak{h}^*$ の有限部分集合である．分解 (3.12) は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{3.13}$$

とも書ける．これを $\mathfrak{g}$ の**ルート空間分解** (root space decomposition) という．

例 3.35. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_n$ を対角行列のなす Cartan 部分代数とすると，分解 (3.11) より，ルートの集合は

$$\Delta = \{\alpha_{i,j} \coloneqq \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \subset \mathfrak{h}^*$$

であり，ルート空間分解は

$$\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} (\mathfrak{sl}_n)_{\alpha_{i,j}}, \qquad (\mathfrak{sl}_n)_{\alpha_{i,j}} = \mathbb{C}E_{i,j} \tag{3.14}$$

となる．

ルートの集合 $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ およびルート空間分解 (3.13) は諸々の著しい性質を示す．以下，Killing 形式 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ の非退化性および $\mathfrak{sl}_2$ の表現論を駆使してそれらを調べていく．

補題 3.36. 記法 (3.12) の下で，

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \qquad (\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*) \tag{3.15}$$

が成り立つ．特に，$x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \neq 0$ ならば作用素 $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は冪零である．

Proof. $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$ とすると，$[h, x] = \alpha(h)x$ かつ $[h, y] = \beta(h)y$ である．このとき，Jacobi 恒等式から

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] = (\alpha + \beta)(h)[x, y]$$

を得る．ゆえに $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である． □

Cartan の判定条件（定理 3.23）により，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $\kappa_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ が非退化であることを思い出そう．

命題 3.37. ルート空間分解 (3.13) について，以下が成り立つ：

(1) $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\, \Delta = \mathfrak{h}^*$,
(2) $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$ について，$\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) \neq \{0\} \iff \alpha + \beta = 0$,
(3) $\alpha \in \Delta$ ならば $-\alpha \in \Delta$,
(4) $\kappa_{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ への制限は $\mathfrak{h}$ 上の非退化対称双線型形式を与える．

Proof. (1) は背理法による．$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\, \Delta \neq \mathfrak{h}^*$ と仮定すると，ある元 $h \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ が存在して任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対して $\alpha(h) = 0$，すなわち $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = \{0\}$ を満たす．このとき分解 (3.13) より $\mathrm{ad}(h) = 0$ となるが，これは $\mathfrak{g}$ の半単純性に反する．

(2) を示す．任意の $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$ に対して，$\kappa_{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{g}$ 不変性より

$$0 = \kappa_{\mathfrak{g}}([h, x], y) + \kappa_{\mathfrak{g}}(x, [h, y]) = \alpha(h)\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) + \beta(h)\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = (\alpha + \beta)(h)\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y).$$

これから「$\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) \neq \{0\} \implies \alpha + \beta = 0$」が従う．逆を背理法で示す．仮にもし $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = \{0\}$ とすると，すでに示したことと併せて，任意の $\beta \in \Delta \cup \{0\}$ について $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\}$ となる．このとき分解 (3.13) より，$\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = \{0\}$ となるが，これは $\kappa_{\mathfrak{g}}$ が非退化であることに反する．よって $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq \{0\}$ である．

(3) および (4) は (2) と $\kappa_{\mathfrak{g}}$ が非退化であることから従う． □

Killing 形式 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ に付随して，線型写像 $\nu\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ が

$$\nu(x)(y) \coloneqq \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{g})$$

によって定まる．Cartan の判定条件により ν は線型同型である．

系 3.38. 線型同型 ν は以下の線型同型を導く：

$$\mathfrak{g}_\alpha \cong (\mathfrak{g}_{-\alpha})^* \quad (\forall \alpha \in \Delta), \qquad \mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*.$$

Proof. 命題 3.37 の (2) および (4) から従う． □

そこで，$\mathfrak{h}^*$ 上の非退化対称双一次形式 $(-,-)\colon \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$ を次式で定義する：

$$(\alpha, \beta) \coloneqq \kappa_{\mathfrak{g}}(\nu^{-1}(\alpha), \nu^{-1}(\beta)) = \alpha(\nu^{-1}(\beta)) \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*). \tag{3.16}$$

命題 3.39. 任意のルート $\alpha \in \Delta$ と $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ について，以下が成り立つ：

(1) $[x, y] = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)\nu^{-1}(\alpha)$,
(2) $(\alpha, \alpha) \neq 0$.

Proof. 補題 3.36 より $[x, y] \in \mathfrak{h}$ である．任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して，$\kappa_{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{g}$ 不変性より

$$\nu([x, y])(h) = \kappa_{\mathfrak{g}}([x, y], h) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, [y, h]) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)\alpha(h)$$

である．よって，$\mathfrak{h}^*$ の元として $\nu([x, y]) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)\alpha$ であり，系 3.38 より (1) を得る．次に (2) を背理法で示す，すなわち $(\alpha, \alpha) = 0$ と仮定して矛盾を導く．命題 3.37(2) より，$x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ で $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) \neq 0$ なるものがとれる．必要なら，一方を定数倍で取り替えて $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 1$ を満たすようにできる．このとき (1) より $[x, y] = \nu^{-1}(\alpha)$ となる．ここで，任意のルート $\beta \in \Delta$ に対して，

$$\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha} \coloneqq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \tag{3.17}$$

とおく．補題 3.36 より $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}$ は $\mathrm{ad}(x)$ および $\mathrm{ad}(y)$ の作用で保たれる．このとき

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}}([\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)]) && (\because (3.8)) \\
&= \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}}(\mathrm{ad}(\nu^{-1}(\alpha))) && (\because [x, y] = \nu^{-1}(\alpha)) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha})(\beta + k\alpha)(\nu^{-1}(\alpha)) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha})((\beta, \alpha) + k(\alpha, \alpha))
\end{aligned}$$

$$= (\dim \mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha})(\beta, \alpha) \qquad (\because \text{仮定 } (\alpha, \alpha) = 0)$$

となる．$\dim \mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha} \neq 0$ なので $(\beta, \alpha) = 0$ を得る．これが任意の $\beta \in \Delta$ について言えるので，命題 3.37(1) より，ルート α は $(-,-)$ の根基に属する．しかし，それは $(-,-)$ が非退化であることに矛盾する． □

各ルート $\alpha \in \Delta$ に対し，元 $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ を次式で定義する：

$$h_\alpha \coloneqq \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \nu^{-1}(\alpha). \tag{3.18}$$

命題 3.40. 任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対し，Lie 代数の準同型 $\iota_\alpha \colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$ であって，条件

$$\iota_\alpha(e) \in \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \iota_\alpha(f) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, \qquad \iota_\alpha(h) = h_\alpha$$

を満たすものが存在する．

Proof. 命題 3.37(2) より，ルートベクトル $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$，$f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ であって $\kappa_{\mathfrak{g}}(e_\alpha, f_\alpha) \neq 0$ を満たすものが存在する．必要なら一方をスカラー倍で取り替えて $\kappa_{\mathfrak{g}}(e_\alpha, f_\alpha) = 2/(\alpha, \alpha)$ を満たすようにできる．このとき命題 3.39(1) より $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$ となる．さらに h_α の定義より，$[h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha$ および $[h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$ もわかる．すなわち $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$ は $\mathfrak{sl}_2$ の基底 $\{e, f, h\}$ と同じ交換関係を満たす．写像 $\iota_\alpha \colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$ を

$$\iota_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \coloneqq a h_\alpha + b e_\alpha + c f_\alpha$$

によって定めれば，これが求める準同型を与える． □

命題 3.41. 以下が成り立つ：

(1) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対し，

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1, \qquad \mathbb{C}\alpha \cap \Delta = \{\alpha, -\alpha\}.$$

(2) 任意の $\alpha, \beta \in \Delta$ に対し，

$$\beta(h_\alpha) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \qquad \beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Delta.$$

(3) $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$ ならば $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(4) $\alpha, \beta \in \Delta$, $\beta \neq \pm\alpha$ に対して，非負整数 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid \beta + k\alpha \in \Delta\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid -p \leq k \leq q\}, \qquad p - q = \beta(h_\alpha).$$

Proof. 任意のルート $\alpha \in \Delta$ をひとつ選んで固定する．命題 3.40 より Lie 代数準同型 $\iota_\alpha \colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$ であって，$\iota_\alpha(e) \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\iota_\alpha(f) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\iota_\alpha(h) = h_\alpha$ を満たすものがとれる．以下では，準同型 $\mathrm{ad} \circ \iota_\alpha \colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現とみなす．$\mathfrak{sl}_2$ の表現論より $\mathrm{ad}(h_\alpha)$ の固有値は全て整数である．よって任意の $\beta \in \Delta$ に対して $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ を得る．

まず (1) を示す．部分ベクトル空間 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\alpha} \coloneqq \bigoplus_{c \in \mathbb{C}} \mathfrak{g}_{c\alpha}$ が $\mathfrak{g}$ の $\{0\}$ でない部分 $\mathfrak{sl}_2$ 表現であることに注意する．前段落で見たように $\mathfrak{g}_{c\alpha} \neq \{0\}$ ならば $2c = c\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$，すなわち $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ である．ゆえに $\mathfrak{sl}_2$ 表現 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\alpha}$ の指標は

$$\chi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\alpha}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\dim \mathfrak{g}_{k\alpha/2}) z^k = \dim \mathfrak{h} + \sum_{k \neq 0} (\dim \mathfrak{g}_{k\alpha/2}) z^k$$

となる．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\alpha} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V(n)^{\oplus d_n}$ と既約分解すると，$\chi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\alpha}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} d_n \chi(V(n)))$ なので，定数項および 1 次の項に着目して

$$\sum_{n \geq 0} d_{2n} = \dim \mathfrak{h}, \qquad \sum_{n \geq 0} d_{2n+1} = \dim \mathfrak{g}_{\alpha/2} \tag{3.19}$$

を得る．ここで $\mathrm{Ker}\, \alpha \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}\alpha}$ が $(\dim \mathfrak{h} - 1)$ 次元の自明部分表現であることに注意すれば，$d_0 \geq \dim \mathfrak{h} - 1$ がわかる．また $\mathrm{Im}\, \iota_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が随伴表現 $V(2)$ と同型な部分表現であることに注意すれば，$d_2 \geq 1$ もわかる．これら不等式と (3.19) の最初の等式を併せて，$d_0 = \dim \mathfrak{h} - 1$, $d_2 = 1$, $d_{2n} = 0$ $(n \geq 2)$ を得る．指標 $\chi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\alpha})$ の z^2 および z^4 の項に着目すれば，特に $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ かつ $\dim \mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ である．後者は「$\alpha \in \Delta \Longrightarrow 2\alpha \notin \Delta$」を導く．これから $\alpha/2 \notin \Delta$ もわかる（実際もし $\alpha/2 \in \Delta$ とすると $\alpha = 2(\alpha/2) \notin \Delta$ であるが，それは矛盾）ので $\sum_{n \geq 0} d_{2n+1} = \dim \mathfrak{g}_{\alpha/2} = 0$ となる．以上から結局 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}\alpha} = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ となることがわかる．ゆえに $\mathbb{C}\alpha \cap \Delta = \{\alpha, -\alpha\}$ である．これで (1) が示された．

(2), (3), (4) の残りの主張は (3.17) で定義した部分 $\mathfrak{sl}_2$ 表現 $\mathfrak{g}_{\beta + \mathbb{Z}\alpha}$, $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha, -\alpha\}$, に着目することによって示される．$\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}$ の指標は

$$\chi(\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}) z^{\beta(h_\alpha)+2k}$$

である．すでに示した (1) より $\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \leq 1$ であるから，$\mathfrak{sl}_2$ の表現論より $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}$ は既約 $\mathfrak{sl}_2$ 表現でなくてはならない．したがって，ある非負整数 n によって $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha} \cong V(n)$ となる．ここで

$$p \coloneqq \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \beta - k\alpha \in \Delta\}, \qquad q \coloneqq \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \beta + k\alpha \in \Delta\}$$

とおけば, 最大・最小固有値の比較により $n = \beta(h_\alpha)+2q$ かつ $-n = \beta(h_\alpha)-2p$ がわかる．よって $p-q = \beta(h_\alpha)$ を得る．また $V(n)$ の構造から「$\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = 1 \iff -p \le k \le q$」である．特に $k = q-p = -\beta(h_\beta)$ の場合を考えて $\dim \mathfrak{g}_{\beta-\beta(h_\alpha)\alpha} = 1$，したがって $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Delta$ を得る．$\alpha+\beta \in \Delta$ のとき $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ となることも $V(n)$ の構造からわかる．以上で全ての主張が示された． □

系 3.42. 任意の $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ について $(\lambda, \mu) = \sum_{\alpha\in\Delta}(\alpha,\lambda)(\alpha,\mu)$ が成り立つ．

Proof. これは以下の計算でわかる：

$$\begin{aligned}
(\lambda,\mu) &= \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(\nu^{-1}(\lambda)) \circ \mathrm{ad}(\nu^{-1}(\mu))) && (\because \text{定義 (3.16)}) \\
&= \sum_{\alpha\in\Delta} (\dim \mathfrak{g}_\alpha)\alpha(\nu^{-1}(\lambda))\alpha(\nu^{-1}(\mu)) && (\because \text{分解 (3.13)}) \\
&= \sum_{\alpha\in\Delta} (\alpha,\lambda)(\alpha,\mu). && (\because \text{命題 3.41(1)})
\end{aligned}$$

□

命題 3.43. $\mathfrak{h}^*$ の実部分ベクトル空間

$$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\, \Delta$$

について，$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \mathrm{rk}\, \mathfrak{g}$ であり，双一次形式 $(-,-)$ の $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ への制限は正定値対称双線型形式 $(-,-)\colon \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ を定める．すなわち $(\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}, (-,-))$ は Euclid 空間である．

Proof. $n := \mathrm{rk}\, \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$ とおく．命題 3.37(1) より $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\, \Delta = \mathfrak{h}^*$ だったので，部分集合 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ であって $\mathfrak{h}^*$ の $\mathbb{C}$ 上の基底を与えるものが存在する．このとき $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ であることを示せば $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = n$ が言える．そのためには任意のルート $\beta \in \Delta$ について，$\beta = \sum_{j=1}^n c_j\alpha_j$ と表示したとき $c_j \in \mathbb{R}$ $(\forall j \in \{1, \ldots, n\})$ を示せばよい．各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $2(\alpha_i, \beta) = \sum_{j=1}^n 2c_i(\alpha_i, \alpha_j)$ である．この両辺を $(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$ で割って

$$\frac{2(\alpha_i,\beta)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = \sum_{j=1}^n c_j \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$$

を得る．命題 3.41(2) より $2(\alpha_i,\beta)/(\alpha_i,\alpha_i), 2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_i,\alpha_i) \in \mathbb{Z}$ である．また $(-,-)$ が非退化であることから行列 $((\alpha_i,\alpha_j))_{1\le i,j\le n}$ は正則である．ゆえに

$$A := \left(\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right)_{1\le i,j\le n} = \left(\frac{2\delta_{i,j}}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right)_{1\le i,j\le n} \cdot ((\alpha_i,\alpha_j))_{1\le i,j\le n}$$

も正則で，これは $GL_n(\mathbb{Q})$ に属する．したがって逆行列 $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{Q})$ が存在し，

$$(c_i) = A^{-1}(2(\alpha_i,\beta)/(\alpha_i,\alpha_i)) \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$$

を得る．以上より $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = n$ が示された．

次に $(-,-)$ の $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ への制限が実数に値を取ることを示す．任意の $\beta \in \Delta$ に対して，系 3.42 より $(\beta,\beta) = \sum_{\alpha\in\Delta}(\alpha,\beta)^2$ である．この両辺を $(\beta,\beta)^2/4$ で割って，再び命題 3.41 より

$$\frac{4}{(\beta,\beta)} = \sum_{\alpha\in\Delta}\left(\frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}\right)^2 \in \mathbb{Z},$$

ゆえに $(\beta,\beta) \in \mathbb{Q}$ を得る．これから任意の $\alpha,\beta \in \Delta$ に対して $(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\cdot(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Q}$ もわかる．よって任意の $\lambda,\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}$ となる．

正定値性は，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して系 3.42 より

$$(\lambda,\lambda) = \sum_{\alpha\in\Delta}(\alpha,\lambda)^2 \geq 0$$

なること，$(-,-)$ の非退化性より等号成立が $\lambda = 0$ のときのみであることから従う． □

例 3.44 (例 3.35 の続き)**.** 再び特殊線型 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_n (n \geq 2)$ のルート空間分解 (3.14) を考える．各ルート $\alpha_{i,j}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$ に対し

$$h_{\alpha_{i,j}} = E_{i,i} - E_{j,j} \tag{3.20}$$

となる．また命題 3.40 の条件を満たす Lie 代数の準同型 $\iota_{\alpha_{i,j}} \colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_n$ として

$$\iota_{\alpha_{i,j}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a(E_{i,i} - E_{j,j}) + bE_{i,j} + cE_{j,i}$$

がとれる．もうひとつのルート $\alpha_{k,l}$ $(1 \leq k \neq l \leq n)$ について

$$\frac{2(\alpha_{i,j},\alpha_{k,l})}{(\alpha_{i,j},\alpha_{i,j})} = \begin{cases} 2 & (k,l) = (i,j) \text{ のとき}, \\ -2 & (k,l) = (j,i) \text{ のとき}, \\ 1 & (k,l) \neq (i,j) \text{ かつ } (k-i)(l-j) = 0 \text{ のとき}, \\ -1 & (k,l) \neq (j,i) \text{ かつ } (k-j)(l-i) = 0 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases} \tag{3.21}$$

となる．準同型 $\mathrm{ad} \circ \iota_{\alpha_{i,j}} \colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_n)$ によって $\mathfrak{sl}_n$ を $\mathfrak{sl}_2$ の表現とみなしたとき，

$$\mathfrak{sl}_n \cong V(2) \oplus V(1)^{\oplus 2(n-2)} \oplus V(0)^{\oplus (n-2)^2} \tag{3.22}$$

と既約分解する．

レポート問題 19. 上記 (3.20), (3.21), (3.22) を証明せよ．

4　ルート系の性質と分類

この節では半単純 Lie 代数のルートの集合の性質を抽象化した「ルート系」の概念について説明する．ひとことで言えば，ルート系とは鏡映変換で閉じている Euclid 空間の有限部分集合のことである．ルート系は Dynkin 図形と呼ばれるグラフ（+ 付加データ）を用いて分類することができ，後で見るようにこれは半単純 Lie 代数の分類にも対応する．

4.1　ルート系と Weyl 群

以下，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を自然数とし，E を n 次元 Euclid 空間，すなわち内積（正定値対称双線型形式）$(-,-)\colon E \times E \to \mathbb{R}$ が与えられた n 次元実ベクトル空間であるとする．また

$$O(E) \coloneqq \{g \in GL(E) \mid (g\lambda, g\mu) = (\lambda, \mu), \forall \lambda, \mu \in E\}$$

を直交群とする．（レポート問題 5(1) より $O(E) \cong O_n(\mathbb{R})$ である．）

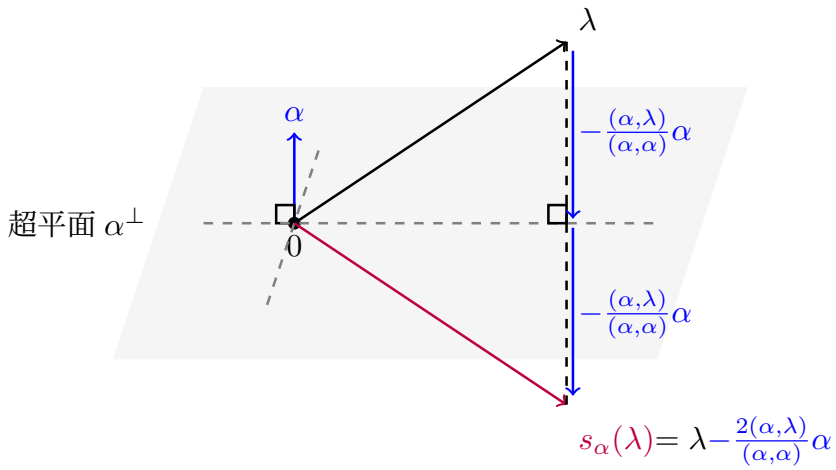
非零ベクトル $\alpha \in E \setminus \{0\}$ に対し，α と直交するベクトルのなす超平面（$n-1$ 次元部分ベクトル空間）

$$\alpha^\perp \coloneqq \{\lambda \in E \mid (\alpha, \lambda) = 0\}$$

が定まる．$E = \mathbb{R}\alpha \oplus \alpha^\perp$ であることに注意せよ．線形変換 $s_\alpha \in GL(E)$ を

$$s_\alpha(\lambda) \coloneqq \lambda - \frac{2(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \qquad (\lambda \in E)$$

によって定義する．これは超平面 $\alpha^\perp$ に関する**鏡映変換** (reflection) である．



次の補題は定義から直接確かめられる.

補題 4.1. 鏡映変換 s_α は以下の性質を満たす.

(1) 任意の $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $s_{r\alpha} = s_\alpha$.
(2) 任意の $\lambda \in \alpha^\perp$, $r \in \mathbb{R}$ に対して $s_\alpha(\lambda + r\alpha) = \lambda - r\alpha$.
(3) $s_\alpha^2 = \mathsf{id}_E$ かつ $s_\alpha \in O(E)$.
(4) 任意の $g \in O(E)$ に対し $g s_\alpha g^{-1} = s_{g\alpha}$.

レポート問題 20. 補題 4.1 の証明を与えよ.

定義 4.2 (ルート系)**.** Euclid 空間 E 内の有限部分集合 $\Delta \subset E \setminus \{0\}$ は以下の条件を満たすとき**ルート系** (root system) と呼ばれる：

(R1) $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Delta = E$,
(R2) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対し $\mathbb{R}\alpha \cap \Delta = \{\alpha, -\alpha\}$,
(R3) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対し $s_\alpha(\Delta) = \Delta$,
(R4) 任意の $\alpha, \beta \in \Delta$ に対し $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

ルート系の元 $\alpha \in \Delta$ を**ルート**と呼ぶ．条件 (R4) の整数 $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ は **Cartan 整数** (Cartan integer) と呼ばれる．また条件 (R4) を**結晶条件** (crystallographic condition) と呼ぶことがある．$n = \dim_{\mathbb{R}} E$ をルート系 Δ の**階数** (rank) と呼び $\mathrm{rk}\,\Delta$ と書く.

前節 §3.5 で証明したことをまとめて，次の定理を得る.

定理 4.3. 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ から生じるルートの集合 Δ は Euclid 空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 内のルート系であって，$\mathrm{rk}\,\Delta = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ を満たす.

定義 4.4. E, E' は n 次元 Euclid 空間，$\Delta \subset E$, $\Delta' \subset E'$ はルート系であるとする．線型同型 $\phi\colon E \to E'$ が存在して $\phi(\Delta) = \Delta'$，かつ Cartan 整数を保つ，すなわち

$$\frac{2(\phi(\alpha),\phi(\beta))}{(\phi(\alpha),\phi(\alpha))} = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \qquad (\forall \alpha, \beta \in \Delta)$$

を満たすとき，ルート系 Δ と Δ' は同型であるといい，以下 $\Delta \cong \Delta'$ と書く．（ここで $\phi\colon E \to E'$ は内積を保たなくても良い.）

例 4.5 (A_n 型ルート系)**.** 自然数 n を固定し，ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1} = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{R}e_i$ とその上の通常の内積 $(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ を考える．$E \coloneqq \{\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\}$ は

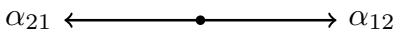
$\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元部分ベクトル空間であり，$(-,-)$ の E への制限によって Euclid 空間である．このとき E の部分集合

$$\Delta = \{\alpha_{i,j} \coloneqq e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n+1\}$$

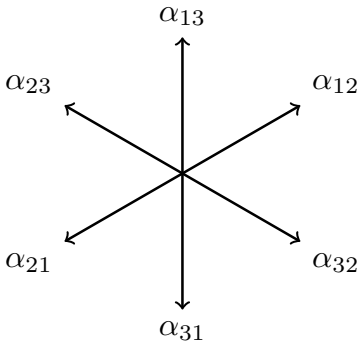
は階数 n のルート系となる．これを A_n 型ルート系と呼ぶ．これは Lie 代数 $\mathfrak{sl}_{n+1}$[*19] とその対角行列のなす Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ から生じるルート系に同型である．

例えば $n = 1, 2, 3$ のとき，A_n 型ルート系は以下のように図示できる．

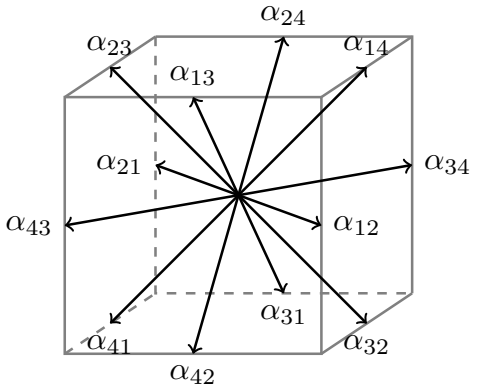
A_1 型：



A_2 型：



A_3 型：



命題 4.6. $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を半単純 Lie 代数，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}, \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ をそれぞれの Cartan 部分代数とし，$\Delta \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, $\Delta' \subset \mathfrak{h}'^*_{\mathbb{R}}$ をそれぞれ対応して生じるルート系とする．もし Lie 代数の同型 $\phi\colon \mathfrak{g} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}'$ で $\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ を満たすものが存在すれば，ルート系 Δ と Δ' は同型である．

Proof. ルートの集合および内積 $(-,-)$ の定義を思い出せばわかる． □

[*19] $\mathfrak{sl}_n$ ではない！

命題 4.6 と事実 3.32 を併せれば，特に半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ からある Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を選んで生じるルート系 Δ は同型を除いて $\mathfrak{h}$ の選び方に依らない．ゆえに対応 $\mathfrak{g} \mapsto \Delta$ は

$$\{\text{ 半単純 Lie 代数の同型類 }\} \to \{\text{ ルート系の同型類 }\} \tag{4.1}$$

という写像を導く．（実はこの写像は全単射になる．）

定義 4.7 (Weyl 群)**.** ルート系 $\Delta \subset E$ が与えられたとき，鏡映 s_α, $\alpha \in \Delta$ で生成される $O(E)$ の部分群をルート系 Δ の **Weyl 群** (Weyl group) を呼び，以下 $W(\Delta)$ と書く．すなわち $W(\Delta)$ は集合 $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ を含む $O(E)$ の部分群のうち最小のものである．

注意 4.8. 性質 $s_\alpha = s_\alpha^{-1}$ により，集合として

$$W(\Delta) = \bigcup_{k \geq 0} \{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_k} \in O(E) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Delta\}$$

である．

補題 4.9. Weyl 群 $W(\Delta)$ は有限群である．

Proof. 条件 (R3) より自然な群準同型

$$W(\Delta) \to \{f \colon \Delta \to \Delta \mid f \text{ は全単射 }\}$$

がある．条件 (R1) からこれは単射になる．一方で右辺は対称群 $\mathfrak{S}_{\#\Delta}$ に同型であるから有限群である．ゆえに $W(\Delta)$ は有限群である． □

例 4.10 (A_n 型ルート系の Weyl 群)**.** Δ を A_n 型ルート系とする．例 4.5 の記号を用いる．任意の $1 \leq i, j, k \leq n+1$, $i \neq j$ に対し，

$$s_{\alpha_{i,j}}(e_k) = e_k - (e_i - e_j, e_k)(e_i - e_j) = \begin{cases} e_j & k = i \text{ のとき}, \\ e_i & k = j \text{ のとき}, \\ e_k & k \neq i, j \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．すなわち $s_{\alpha_{i,j}}$ は第 i 成分と第 j 成分の互換である．よってこれらで生成される Weyl 群 $W(\Delta)$ は対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$[*20]に同型である．

[*20] $\mathfrak{S}_n$ ではない！

4.2 結晶条件からの帰結

Euclid 空間 E の 2 つの非零ベクトル α, β のなす角 $\theta \in [0, \pi]$ が，式

$$(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta| \cos\theta$$

で定まることを思い出そう．ただし $|\alpha| := \sqrt{(\alpha, \alpha)} > 0$ である．

レポート問題 21. $\alpha, \beta \in E \setminus \{0\}$ は一次独立であるとし，$P := \mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$ とおく．また $\theta \in (0, \pi)$ を α と β のなす角とする．このとき鏡映の合成 $s_\beta s_\alpha \in O(E)$ は，$P^\perp = \alpha^\perp \cap \beta^\perp$ の各点を固定し，P 上では原点周りの 2θ 回転を与えることを示せ．

さて，ルート系 $\Delta \subset E$ が与えられたとき，2 つのルート $\alpha, \beta \in \Delta$ のなす角 θ のとり得る値には強い制約がかかる．実際，$0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ および結晶条件 (R4) から

$$4\cos^2\theta = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

でなくてはならない．またこのとき，$|\alpha| \leq |\beta|$ かつ $\theta \notin \{0, \pi/2, \pi\}$ と仮定すると，再び $0 < |\cos\theta| < 1$ と結晶条件 (R4) より

$$\left| \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \right| = 2\frac{|\alpha|}{|\beta|} |\cos\theta| = 1$$

である．以上から，次の補題を得る．

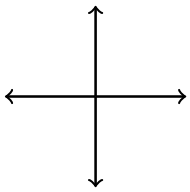
補題 4.11. Δ をルート系，$\alpha, \beta \in \Delta$ を 2 つのルートで $\beta \neq \pm\alpha$ かつ $|\alpha| \leq |\beta|$ なるものとする．このとき Cartan 整数 $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$, $2(\beta, \alpha)/(\beta, \beta)$，長さの比 $|\beta|/|\alpha|$，α と β のなす角 θ，のとり得る値は下表のようになる：

$2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$	$2(\beta, \alpha)/(\beta, \beta)$	$\lvert\beta\rvert/\lvert\alpha\rvert$	θ
0	0	不定	$\pi/2$
1	1	1	$\pi/3$
-1	-1	1	$2\pi/3$
2	1	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
-2	-1	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$
3	1	$\sqrt{3}$	$\pi/6$
-3	-1	$\sqrt{3}$	$5\pi/6$

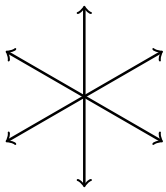
(4.2)

例 4.12 (階数 2 のルート系)**.** 以下は 4 つの図はそれぞれ階数 2 のルート系を与えることが容易に確かめられる．補題 4.11 より，階数 2 のルート系がこれらに同型なもので尽くされることもわかる．

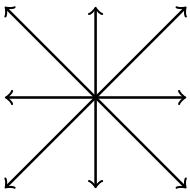
$A_1 \times A_1$ 型：



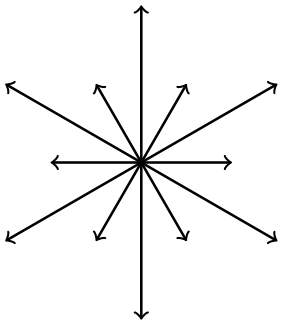
A_2 型：



$B_2(= C_2)$ 型：



G_2 型：



系 4.13. $\Delta \subset E$ をルート系，$\alpha, \beta \in \Delta$ をルートで $\beta \neq \pm\alpha$ なるものとする．もし $\pm(\alpha, \beta) < 0$ ならば，$\alpha \pm \beta \in \Delta$ である（複号同順）．

Proof. $|\alpha| \leq |\beta|$ として一般性を失わない．このとき仮定 $\pm(\alpha, \beta) < 0$ および補題 4.11 より $2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta) = \mp 1$ である．条件 (R3) より，$\alpha \pm \beta = s_\beta(\alpha) \in \Delta$ を得る． □

4.3 Weyl の部屋と単純ルート

以下，E は Euclid 空間，$\Delta \subset E$ はルート系であるとする．

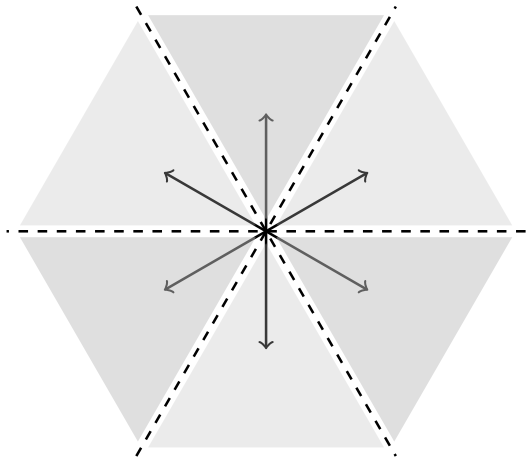
定義 4.14 (Weyl の部屋)**.** 開部分集合 $E_{\mathrm{reg}} \subset E$ を

$$E_{\mathrm{reg}} \coloneqq \{\lambda \in E \mid (\lambda, \alpha) \neq 0, \forall \alpha \in \Delta\} = E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \alpha^\perp \tag{4.3}$$

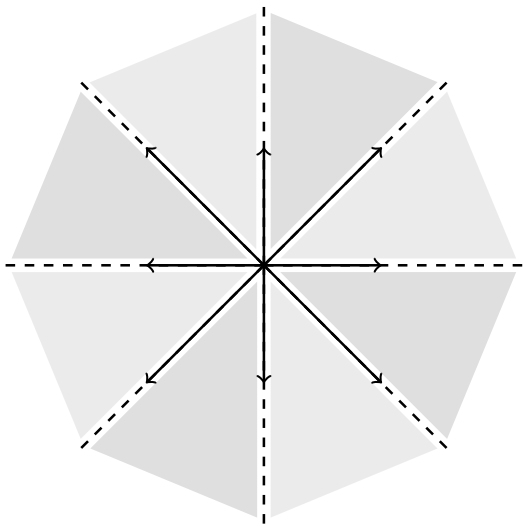
によって定義し，その元 $\lambda \in E_{\mathrm{reg}}$ を**正則元** (regular element) という．また，E_{reg} の（弧状）連結成分を **Weyl の部屋** (Weyl chamber) と呼ぶ．定義より E_{reg} は有限個の Weyl の部屋の非交和 (disjoint union) である：

$$E_{\mathrm{reg}} = \bigsqcup_{\mathcal{C}:\ \text{Weyl の部屋}} \mathcal{C}.$$

例えば A_2 型，$B_2(= C_2)$ 型ルート系について，E_{reg} はそれぞれ下図の平面全体から点線で表された直線を除いた部分である．E_{reg} はそれぞれ 6 つ，8 つの Weyl の部屋に分割される．



A_2 型



$B_2(= C_2)$ 型

任意の Weyl の部屋 $\mathcal{C}$ に対し，そこに住む正則元 $\lambda \in \mathcal{C}$ をとって，

$$\Delta^+(\mathcal{C}) \coloneqq \{\alpha \in \Delta \mid (\alpha, \lambda) > 0\}, \qquad \Delta^-(\mathcal{C}) \coloneqq -\Delta^+(\mathcal{C})$$

と定義する．$\Delta^+(\mathcal{C})$ および $\Delta^-(\mathcal{C})$ は正則元 $\lambda \in \mathcal{C}$ のとり方には依らず，$\mathcal{C}$ から一意的に定まる．また，条件 (R2) により

$$\Delta = \Delta^+(\mathcal{C}) \sqcup \Delta^-(\mathcal{C})$$

が成り立つ．さらに $\Delta^+(\mathcal{C})$ の部分集合

$$\Pi(\mathcal{C}) \coloneqq \{\alpha \in \Delta^+(\mathcal{C}) \mid \nexists \beta_1, \beta_2 \in \Delta^+(\mathcal{C}) \text{ s.t. } \alpha = \beta_1 + \beta_2\}$$

を考える．すなわち $\Pi(\mathcal{C})$ は $\Delta^+(\mathcal{C})$ に属するルートのうち，他のルートの和に書けないもの全体である．

命題 4.15. 任意の Weyl の部屋 $\mathcal{C}$ に対して，

$$\Pi(\mathcal{C}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

と書く．このとき次の性質が満たされる：

(S1) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は実ベクトル E の基底をなす．
(S2) 任意のルート $\alpha \in \Delta$ は $\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ もしくは $\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i$ のいずれかに属する．

Proof. まず (S2) を示す．そのためには

$$\Delta^+(\mathcal{C}) = \Delta \cap \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i\right) \tag{4.4}$$

を示せば良い．(左辺) $\supset$ (右辺) は $\Delta^+(\mathcal{C})$ の定義と $\Pi(\mathcal{C}) \subset \Delta^+(\mathcal{C})$ より明らかである．(左辺) $\subset$ (右辺) を背理法で示そう．すなわち $\alpha \in \Delta^+(\mathcal{C})$ で $\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ に属さないものが存在すると仮定する．$\lambda \in \mathcal{C}$ を固定し，そのような α のうち (λ, α) が最小となるものを考える．このとき特に $\alpha \in \Pi(\mathcal{C})$ であるから，ある $\beta_1, \beta_2 \in \Delta^+(\mathcal{C})$ が存在して $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ と書ける．このとき $(\lambda, \alpha) = (\lambda, \beta_1) + (\lambda, \beta_2) > (\lambda, \beta_i)$, $i \in \{1, 2\}$ であるから，β_1 と β_2 はともに $\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ に属する．よって $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ も $\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ に属さねばならない．これは矛盾である．これで (S2) が示された．

次に (S1) を示す．まず，条件 (R1) とすでに示した性質 (S2) により，$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\, \Pi(\mathcal{C}) = E$ が従う．あとは $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ が一次独立であることを示せば良い．いま $(c_i) \in \mathbb{R}^n$ について $\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i = 0$ と仮定する．係数 c_i の正負に応じて和を分けることで，

$$\mu \coloneqq \sum_{i\colon c_i \geq 0} c_i\alpha_i = -\sum_{j\colon c_j \leq 0} c_j\alpha_j$$

なる．ここで $1 \leq i \neq j \leq n$ に対して $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ であることに注意しよう．実際，もしそうでない，すなわち $(\alpha_i, \alpha_j) > 0$ なる i, j があるとすると，系 4.13 より $\alpha_i - \alpha_j \in \Delta$ となり，すでに示した (S2) に反する．この注意により

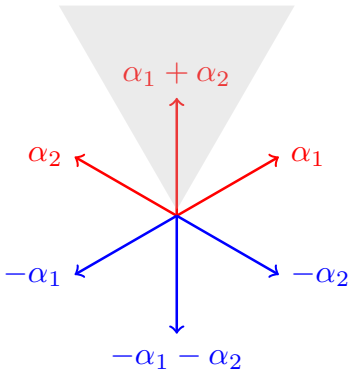
$$0 \leq (\mu, \mu) = -\sum_{c_i \geq 0}\sum_{c_j \leq 0} c_i c_j (\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$$

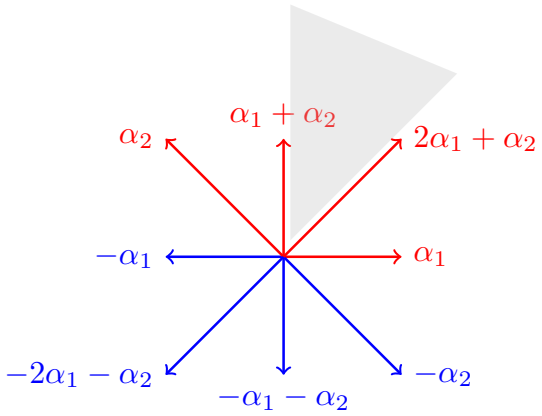
となるから，$\mu = 0$ がわかる．すると勝手な $\lambda \in \mathcal{C}$ に対して，

$$0 = (\lambda, \mu) = \sum_{c_i \geq 0} c_i(\lambda, \alpha_i) = -\sum_{c_j \leq 0} c_j(\lambda, \alpha_j)$$

となるが，$\Pi(\mathcal{C})$ の定義より任意の i に対して $(\lambda, \alpha_i) > 0$ であるから，結局 $(c_i) = 0$ を得る．よって $\Pi(\mathcal{C}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は一次独立である． □

例 4.16 (A_2 型，B_2 型の場合)**.** 例えば，Weyl の部屋 $\mathcal{C}$ を下図の灰色部分のようにとると，$\Delta^+(\mathcal{C})$ は赤色矢印の集合，$\Delta^-(\mathcal{C})$ は青色矢印の集合となる．また $\Pi(\mathcal{C}) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ が上の性質 (S1) & (S2) を満たしていることも，直接確かめられる．





レポート問題 22. (1) 上の例 4.16 にならって，G_2 型ルート系において好きな Weyl の部屋 $\mathcal{C}$ をひとつ選び，$\mathcal{C}$ に対応する部分集合 $\Delta^+(\mathcal{C}), \Delta^-(\mathcal{C}), \Pi(\mathcal{C})$ をそれぞれ図示せよ．また各ルートを $\Pi(\mathcal{C})$ の元の線型結合の形で表すことによって性質 (S2) を確かめよ．

(2) A_n 型ルート系 $\Delta \subset E$（例 4.5）について，

$$\mathcal{C} = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i \in E \mid x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1}\}$$

で与えられる Weyl の部屋 $\mathcal{C}$ を考える．$\mathcal{C}$ に対応する部分集合 $\Delta^+(\mathcal{C}), \Delta^-(\mathcal{C}), \Pi(\mathcal{C})$ をそれぞれ求めよ．また各ルートを $\Pi(\mathcal{C})$ の元の線型結合の形で表すことによって性質 (S2) を確かめよ．

定義 4.17 (単純ルート)**.** 一般に，ルート系 Δ の部分集合 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ で，上記の命題 4.15 の性質 (S1) & (S2) を満たすものを，**単純ルートの集合** (set of simple roots) と呼び，その元を**単純ルート**と呼ぶ．このとき，

$$\Delta^+ := \Delta \cap (\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i), \qquad \Delta^- := \Delta \cap (\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i)$$

とおき，Δ^+ に属するルートを**正ルート** (positive root)，Δ^- に属するルートを**負ルート** (negative root) と呼ぶ．(S2) および (R2) より $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ かつ $\Delta^- = -\Delta^+$ である．また $\Pi = \Pi(\mathcal{C})$ のときは，(4.4) より $\Delta^\pm = \Delta^\pm(\mathcal{C})$ である．

上の命題 4.15 によって，

$$\{\text{ Weyl の部屋 }\} \to \{\text{ 単純ルートの集合 }\}; \qquad \mathcal{C} \mapsto \Pi(\mathcal{C}) \tag{4.5}$$

という写像がある．この写像の定義域と値域にはそれぞれ Weyl 群 $W(\Delta)$ が自然に作用していることに注意しよう．すなわち Weyl 群の元 $w \in W(\Delta)$ と Weyl の部屋 $\mathcal{C}$，単純

ルートの集合 Π に対し，$w\mathcal{C}$ はまた Weyl の部屋であり，$w\Pi$ はまた単純ルートの集合である．

命題 4.18. 写像 (4.5) は全単射であり，しかも Weyl 群の作用と整合的，すなわち

$$\Pi(w\mathcal{C}) = w\Pi(\mathcal{C})$$

が任意の $w \in W(\Delta)$ と Weyl の部屋 $\mathcal{C}$ について成り立つ．

Proof. 単純ルートの集合 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ が与えられたとき，

$$\mathcal{C}(\Pi) \coloneqq \{\lambda \in E \mid (\lambda, \alpha_i) > 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} \tag{4.6}$$

とおけば，$\mathcal{C}(\Pi)$ は Weyl の部屋である．対応 $\Pi \mapsto \mathcal{C}(\Pi)$ が (4.5) の逆写像を与える．Weyl 群作用との整合性は

$$\begin{aligned} w\mathcal{C}(\Pi) &= \{\lambda \in E \mid (w^{-1}\lambda, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Pi\} \\ &= \{\lambda \in E \mid (\lambda, w\alpha) > 0, \forall \alpha \in \Pi\} \\ &= \mathcal{C}(w\Pi) \end{aligned}$$

より従う． □

次の目標は，ルート系 Δ がその単純ルートの集合から復元できることを示すことである．以下，単純ルートの集合 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ をひとつ固定する．このとき各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $s_i \coloneqq s_{\alpha_i}$ と略記し，**単純鏡映** (simple reflection) と呼ぶ．また $W(\Pi)$ を単純鏡映 $s_1, \ldots, s_n$ によって生成される $W(\Delta)$ の部分群とする．すなわち

$$W(\Pi) \coloneqq \bigcup_{k \geq 0} \{s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k} \mid i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}\} \quad \subset W(\Delta)$$

とする．この節の残りで次の定理を証明する．

定理 4.19. 単純ルートの集合 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ について，以下が成り立つ．

(1) $W(\Delta) = W(\Pi)$ である．すなわち Weyl 群 $W(\Delta)$ は単純鏡映 $s_1, \ldots, s_n$ によって生成される．

(2) $\Delta = W(\Pi) \cdot \Pi$ である．すなわち，任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対し，元 $w \in W(\Pi)$ が存在して $w(\alpha) \in \Pi$ となる．

(3) もうひとつの単純ルートの集合 $\Pi' \subset \Delta$ が任意に与えられたとき，元 $w \in W(\Pi)$ が存在して $w\Pi' = \Pi$ となる．

注意 4.20. A_n 型ルート系において，$\Pi = \{\alpha_i := \alpha_{i,i+1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ は単純ルートの集合を与える．このとき単純鏡映 s_i は $W(\Delta) = \mathfrak{S}_{n+1}$ における隣接互換 $(i, i+1)$ であり，定理 4.19(1) の主張は $\mathfrak{S}_{n+1}$ が隣接互換で生成されるという有名な事実，いわゆる「あみだくじの原理」にほかならない．その意味で定理 4.19(1) は「あみだくじの原理」のルート系を用いた一般化と思うことができる．

定理の証明の前に少し準備が必要である．

補題 4.21. 上の設定で，任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ について

$$s_i(\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}) = \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$$

が成り立つ．

Proof. 任意の $\beta \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ を $\beta = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j$, $c_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と書いたとき，$\beta \neq \alpha_i$ より，ある $j \neq i$ について $c_j > 0$ となる．$s_{\alpha_i}(\beta)$ はルートなので，正ルートか負ルートのいずれかであるが，$s_{\alpha_i}(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i$ より，$s_{\alpha_i}(\beta)$ における α_j の係数は $c_j > 0$ である．ゆえに $s_{\alpha_i}(\beta)$ は負ルートではあり得ない． □

定義 4.22 (Weyl ベクトル)**.** 与えられた単純ルートの集合 Π に対して，

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \quad \in E$$

と定義する．これは **Weyl ベクトル** (Weyl vector) と呼ばれる．

系 4.23. 補題 4.21 の設定で，任意の単純ルート $\alpha_i \in \Pi$ に対し，

$$s_i(\rho) = \rho - \alpha_i, \qquad \frac{2(\alpha_i, \rho)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = 1$$

が成り立つ．

Proof. 1 つ目の等式は，補題 4.21 より従う：

$$s_i(\rho) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}} s_i(\alpha) + s_i(\alpha_i) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}} \alpha - \alpha_i \right) = \rho - \alpha_i.$$

2 つ目の等式は，1 つ目の等式から従う． □

定理 *4.19* の証明．まず (3) を証明する．(4.6) の記法を用いて，Π, Π' にそれぞれ対応する Weyl の部屋 $\mathcal{C}(\Pi), \mathcal{C}(\Pi')$ を考える．$\lambda \in \mathcal{C}(\Pi')$ を任意にとって，$w \in W(\Pi)$ を

$$(w\lambda, \rho) = \max\{(v\lambda, \rho) \mid v \in W(\Pi)\}$$

なる元とする（ただし ρ は Π に付随する Weyl ベクトルである）．任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$s_i w \in W(\Pi)$ だから

$$(w\lambda, \rho) \geq (s_i w\lambda, \rho) = (w\lambda, s_i\rho) = (w\lambda, \rho) - (w\lambda, \alpha_i),$$

よって $(w\lambda, \alpha_i) \geq 0$ となる．ここで 2 つ目の等号に系 4.23 を用いた．さらに $w\lambda \in E_{\mathrm{reg}}$ より $(w\lambda, \alpha_i) > 0$，したがって $w\lambda \in \mathcal{C}(\Pi)$ すなわち $w\mathcal{C}(\Pi') = \mathcal{C}(\Pi)$ である．これと命題 4.18 より，$\mathcal{C}(w\Pi') = w\mathcal{C}(\Pi') = \mathcal{C}(\Pi)$ ゆえに $w\Pi' = \Pi$ が従う．これで (3) が示された．

次に (2) を示す．与えられた任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対し，集合

$$\alpha^{\perp} \setminus \bigcup_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha, -\alpha\}} \beta^{\perp}$$

が空でないことに注意する．その元 μ をひとつ選ぶ．このとき $\epsilon > 0$ を十分小さくとれば $\mu + \epsilon\alpha \in E_{\mathrm{reg}}$ かつ

$$0 < (\mu + \epsilon\alpha, \alpha) = \epsilon(\alpha, \alpha) < \min\{|(\mu + \epsilon\alpha, \beta)| \in \mathbb{R}_{>0} \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha, -\alpha\}\}$$

を満たすようにできる．$\mathcal{C}'$ を $\mu + \epsilon\alpha$ を含む Weyl の部屋とし，$\Pi' \coloneqq \Pi(\mathcal{C}')$ を対応する単純ルートの集合とすれば，作り方から $\alpha \in \Pi'$ がわかる．前段落ですでに示したことより，適当な $w \in W(\Pi)$ によって $w\Pi' = \Pi$ となる．ゆえに $w\alpha \in \Pi$ である．これで (2) が示された．

最後に (1) を示そう．そのためには任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対して $s_\alpha \in W(\Pi)$ を言えば十分である．前段落で示したことより，$w \in W(\Pi)$ をうまくとれば $w\alpha \in \Pi$，すなわちある $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $w\alpha = \alpha_i$ となる．このとき補題 4.1(4) より $s_\alpha = s_{w^{-1}(\alpha_i)} = w^{-1}s_i w \in W(\Pi)$ となる．以上で (1) が示された． □

系 4.24. 対応 $w \mapsto w\Pi \mapsto w\mathcal{C}(\Pi)$ は全単射

$$W(\Delta) \xleftrightarrow{1:1} \{\text{ 単純ルートの集合 }\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{ Weyl の部屋 }\}$$

を与える．

Proof. 最初の写像 $w \mapsto w\Pi$ の全射性は定理 4.19(3) から，単射性は下記の系 4.39 から従う[*21]．2 つ目の写像については命題 4.18 ですでに見た． □

[*21] 1 月 8 日追記：旧版でここの単射性の証明が不十分でした．これを補うため新たに §4.6 を追加しました．ご指摘ありがとうございました．

4.4 Dynkin 図形によるルート系の分類

補題 4.25. $\Delta \subset E$ をルート系とし，$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ と $\Pi' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$ をその 2 つの単純ルートの集合とする．このとき置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して

$$(\alpha'_{\sigma(i)}, \alpha'_{\sigma(j)}) = (\alpha_i, \alpha_j) \qquad (\forall i, j \in \{1, \ldots, n\})$$

を満たす．

Proof. 定理 4.19(3) より，ある $w \in W(\Delta)$ が存在して $w\Pi = \Pi'$ となる．すなわち，適当な置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ によって $w(\alpha_i) = \alpha'_{\sigma(i)}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ となる．$w \in O(E)$ だから

$$(\alpha'_{\sigma(i)}, \alpha'_{\sigma(j)}) = (w(\alpha_i), w(\alpha_j)) = (\alpha_i, \alpha_j)$$

である． □

定義 4.26 (Cartan 行列)**.** $\Delta \subset E$ をルート系，$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ を単純ルートの集合とする．このとき Cartan 整数を並べてできる n 次正方行列

$$C(\Delta) := (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}, \qquad c_{ij} := \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

を **Cartan 行列** (Cartan matrix) という．上の補題 4.25 により $C(\Delta)$ は添字の入れ替えを除いて単純ルートの集合 $\Pi \subset \Delta$ のとり方に依らず，Δ だけから決まる．

補題 4.27. $i \neq j$ ならば $c_{ij} \le 0$ である．さらに $|\alpha_i| \le |\alpha_j|$ とし，α_i と α_j のなす角を θ_{ij} とすると，$c_{ij}, c_{ji}, |\alpha_j|/|\alpha_i|, \theta_{ij}$ のとり得る値は下表のようになる：

c_{ij}	c_{ji}	$\lvert\alpha_j\rvert/\lvert\alpha_i\rvert$	θ_{ij}
0	0	不定	$\pi/2$
-1	-1	1	$2\pi/3$
-2	-1	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$
-3	-1	$\sqrt{3}$	$5\pi/6$

Proof. もし $c_{ij} > 0$ とすると，系 4.13 により $\alpha_i - \alpha_j \in \Delta$ となるが，これは性質 (S2) に反する．したがって $c_{ij} \le 0$ である．あとは補題 4.11 から従う． □

定義 4.28 (Dynkin 図形)**.** $\Delta \subset E$ をルート系，$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ を単純ルートの集合とする．このとき，$1, 2, \ldots, n$ を頂点とし，異なる 2 つの頂点 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ のあ

いだに以下のルールで単辺もしくは有向多重辺を定めて得られる図形 $\Gamma(\Delta)$ を，ルート系 Δ の **Dynkin 図形** (Dynkin diagram) と呼ぶ：

	$i \quad j$	$i \quad j$	$i \quad j$	$i \quad j$
(c_{ij}, c_{ji})	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(-2,-1)$	$(-3,-1)$

補題 4.25 により，Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ は頂点の入れ替えを除いて単純ルートの集合 $\Pi \subset \Delta$ のとり方に依らず，Δ だけから決まる．また，もちろん Cartan 行列 $C(\Delta)$ は Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ から復元できる．

例 4.29 (階数 2 の場合)**.** Dynkin 図形はそれぞれ以下のようになる:

$A_1 \times A_1$ 型： $1 \quad 2$　　A_2 型： $1 \quad 2$

B_2 型： $1 \quad 2$　　G_2 型： $1 \quad 2$

例 4.30 (A_n 型ルート系の場合)**.** 単純ルートの集合として $\{\alpha_i = e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i \le n\}$ をとれば，Cartan 行列は

$$c_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき} \\ -1 & |i-j| = 1 \text{ のとき} \\ 0 & |i-j| > 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．よって Dynkin 図形は次のようになる：

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n-1 \quad n$$

命題 4.31. 2 つのルート系が互いに同型であることと，対応する Dynkin 図形（もしくは Cartan 行列）が頂点（もしくは添字）の置換を除いて等しいことは同値である．

Proof. $\Delta \subset E$ と $\Delta' \subset E'$ を 2 つのルート系とする．$\Delta \cong \Delta'$ ならば, 添字の置換を除いて $C(\Delta) = C(\Delta')$ となることは明らかである．逆を示す．すなわち, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ と $\Pi' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\} \subset \Delta'$ をそれぞれ単純ルートの集合とし，任意の $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ について

$$\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \frac{2(\alpha'_i, \alpha'_j)}{(\alpha'_i, \alpha'_i)}$$

と仮定したとき，$\Delta \cong \Delta'$ であることを示す．まず線型同型 $\phi\colon E \to E'$ を $\phi(\alpha_i) = \alpha'_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ によって定義する．仮定と (S1) より，任意の $\lambda \in E$ と $i \in \{1, \ldots, n\}$ に

ついて

$$\frac{2(\alpha_i,\lambda)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = \frac{2(\alpha'_i,\phi(\lambda))}{(\alpha'_i,\alpha'_i)}$$

が成り立つ．特に $\phi\circ s_{\alpha_i} = s_{\alpha'_i}\circ\phi$，ゆえに $\phi\circ W(\Pi)\circ\phi^{-1} = W(\Pi')$ となる．よって，定理 4.19(3) より

$$\phi(\Delta) = \phi(W(\Pi)\Pi) = W(\Pi')\phi(\Pi) = W(\Pi')\Pi' = \Delta'$$

が成り立つ．また任意の $\alpha,\beta\in\Delta$ に対し，定理 4.19(3) より $w\alpha_i = \alpha$ なるように $w\in W(\Pi)$ および $i\in\{1,\dots,n\}$ を選べば，

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2(\alpha_i,w^{-1}\beta)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = \frac{2(\alpha'_i,\phi(w^{-1}\beta))}{(\alpha'_i,\alpha'_i)} = \frac{2(\alpha'_i,w'^{-1}\phi(\beta))}{(\alpha'_i,\alpha'_i)} = \frac{2(\phi(\alpha),\phi(\beta))}{(\phi(\alpha),\phi(\alpha))}$$

となる．ただし，ここで $w' := \phi\circ w\circ\phi^{-1}\in W(\Pi')$ とおいた．これで ϕ がルート系の同型 $\Delta\cong\Delta'$ を導くことが示された． □

定義 4.32 (既約ルート系)**.** ルート系 Δ は，空でない部分集合への直交分解，すなわち分解

$$\Delta = \Delta_1\sqcup\Delta_2\sqcup\cdots\sqcup\Delta_d,\qquad \Delta_k\neq\varnothing\quad(\forall k\in\{1,2,\dots,d\}) \tag{4.7}$$

であって，$\alpha\in\Delta_k,\beta\in\Delta_l,k\neq l$ ならば $(\alpha,\beta)=0$ を満たすものを持つとき，**可約**であるという．このとき $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_d$ は各々がルート系であり，$\operatorname{rk}\Delta = \sum_{k=1}^d \operatorname{rk}\Delta_k$ を満たす．可約でないとき Δ は**既約** (irreducible) であるという．

命題 4.33. 任意のルート系 Δ は既約ルート系の和に直交分解する．すなわち直交分解 (4.7) であって各 Δ_k が既約ルート系であるようなものが一意的に存在する．また Δ が既約であることと，Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ が連結であることは同値である．

Proof. 2 つのルート $\alpha,\beta\in\Delta$ に対し，ルートの列 $\alpha=\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_l=\beta$ であって $(\beta_k,\beta_{k+1})\neq 0$, $1\le\forall k<l$ を満たすものが取れるとき，$\alpha\sim\beta$ と書く．$\sim$ は Δ の同値関係を定める．その同値類を $\Delta_1,\dots,\Delta_d$ とすれば求める直交分解を得る．$\Pi\subset\Delta$ を単純ルートの集合とし，$\Pi_k := \Pi\cap\Delta_k$ とおく．このとき Π_k は Δ_k の単純ルートの集合を与える．ゆえに $\Gamma(\Delta)$ は $\Gamma(\Delta_1),\dots,\Gamma(\Delta_d)$ の非交和になる．特に $\Gamma(\Delta)$ が連結ならば Δ は既約である．逆に $\Gamma(\Delta)$ が連結でないならば，$\Gamma(\Delta)$ の連結成分への分解に対応して単純ルートの集合の直交分解 $\Pi=\Pi_1\sqcup\cdots\sqcup\Pi_d$ がある．このとき $\alpha\in\Pi_k,\beta\in\Pi_l,k\neq l$ ならば $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$ となるので，群として $W(\Pi)=W(\Pi_1)\times\cdots\times W(\Pi_d)$ と分解する．

また $k \neq l$ ならば $W(\Pi_k)$ の Π_l への作用は自明なので，定理 4.19 より

$$\Delta = W(\Pi)\Pi = W(\Pi_1)\Pi_1 \sqcup \cdots \sqcup W(\Pi_d)\Pi_d$$

である． そこで $\Delta_k := W(\Pi_k)\Pi_k$ とおけば，Δ の直交分解 (4.7) を得る．したがって Δ は可約である． □

レポート問題 23. 2 つの既約ルート系 $\Delta \subset E$ と $\Delta' \subset E'$ が，線型同型 $\phi\colon E \to E'$ によって（定義 4.4 の意味で）ルート系として同型であるとする．このとき，定数 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，任意の $\lambda, \mu \in E$ について $(\phi(\lambda), \phi(\mu)) = r(\lambda, \mu)$ となることを示せ．

定理 4.34 (既約ルート系の分類)**.** 階数 n の既約ルート系の Dynkin 図形は，頂点の置換を除いて以下に列挙する X_n 型 ($X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$) のものに限られる．逆に下記の各 X_n 型 Dynkin 図形に対し，それを $\Gamma(\Delta)$ として実現する既約ルート系 Δ が同型を除いてただひとつ存在する．

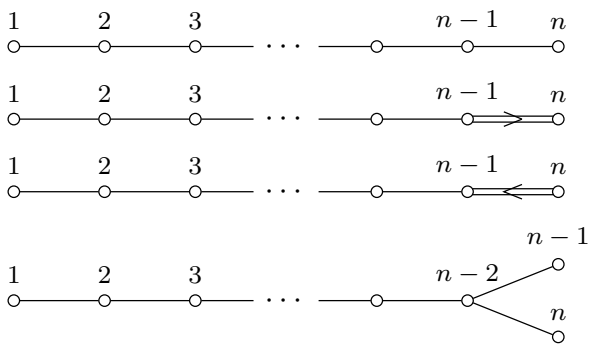
古典型 (classical type)

A_n 型 $(n \geq 1)$：

B_n 型 $(n \geq 2)$：

C_n 型 $(n \geq 3)$：

D_n 型 $(n \geq 4)$：

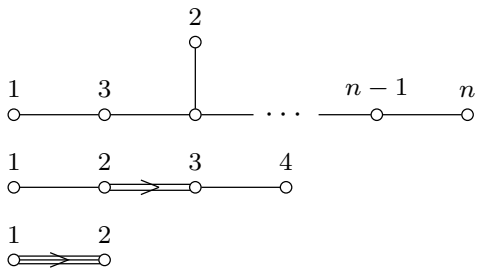


例外型 (exceptional type)

E_n 型 $(n = 6, 7, 8)$：

F_4 型：

G_2 型：



Proof. $\Delta \subset E$ を既約ルート系，$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ をその単純ルートの集合とする．このとき $I := \{1, \ldots, n\}$ は Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ の頂点の集合を与える．

ここで Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ から多重辺の向きづけを忘れて得られるグラフ $\bar{\Gamma}(\Delta)$ を考える（これを Δ の Coxeter グラフと呼ぶ）．一般にグラフ G とは，頂点の集合 J と 2 頂

点を結ぶいくつかの辺からなるデータである．以下，J は有限集合であるとし，各頂点 $j \in J$ は自己ループ（j とそれ自身を結ぶ辺）を持たないと仮定する．頂点 $i, j \in J$ を結ぶ辺の数を $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として，以下 $G = (J, (a_{ij})_{i,j \in J})$ のように表す．この記法のもとで

$$\bar{\Gamma}(\Delta) = (I, ((1 - \delta_{ij}) c_{ij} c_{ji})_{i,j \in I})$$

と表せる．命題 4.33 により $\bar{\Gamma}(\Delta)$ は連結なグラフである．

一般に，グラフ $G = (J, (a_{ij})_{i,j \in J})$ に対して，2 次形式 $Q_G \colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ を

$$Q_G(x) \coloneqq \sum_{j \in J} x_j^2 - \sum_{i,j \in J} \frac{\sqrt{a_{ij}}}{2} x_i x_j, \qquad x = (x_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J \tag{4.8}$$

と定める．$G = \bar{\Gamma}(\Delta)$ のときは，

$$Q_{\bar{\Gamma}(\Delta)}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{c_{ij} c_{ji}} x_i x_j$$

となる．ここで

$$Q_{\bar{\Gamma}(\Delta)}(x) = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \right|^2 \tag{4.9}$$

が成り立つことに注意する．ゆえに 2 次形式 $Q_{\bar{\Gamma}(\Delta)}(x)$ は正定値，すなわち任意の $x \in \mathbb{R}^I = \mathbb{R}^n$ に対し $Q_{\bar{\Gamma}(\Delta)}(x) \geq 0$ かつ等号成立は $x = 0$ のときのみ，である．したがって定理の前半の主張は下記の命題 4.35 から従う．

定理の後半の存在と一意性に関する主張は，次節 §4.5 における既約ルート系の具体的実現（存在）と上記の命題 4.31（一意性）から従う． □

命題 4.35. 連結なグラフ G について，以下は同値である：

(I) (4.8) で定義される 2 次形式 $Q_G(x)$ が正定値である；

(II) G はある X_n 型 ($X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$) Dynkin 図形から多重辺の向きづけを忘れて得られるグラフに同型である．

証明のためにいくつか準備をする．

補題 4.36. グラフ $G' = (J', (a'_{ij})_{i,j \in J'})$ がグラフ $G = (J, (a_{ij})_{i,j \in J})$ の部分グラフであるとする．すなわち $J' \subset J$ かつ $a'_{ij} \leq a_{ij}$ ($\forall i, j \in J'$) であると仮定する．$\mathbb{R}^{J'}$ を，$\mathbb{R}^J$ の部分集合 $\{x = (x_j) \in \mathbb{R}^J \mid x_j = 0, \forall j \in J \setminus J'\}$ と同一視する．このとき次が成り立つ：

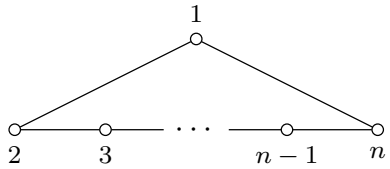
$$Q_{G'}(x) \geq Q_G(x), \qquad \forall x \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{J'}.$$

Proof. 定義 (4.8) より，任意の $x \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{J'}$ について

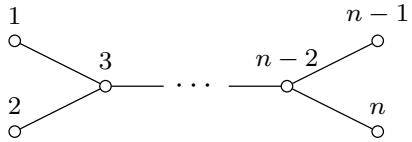
$$Q_G(x) = \sum_{j \in J'} x_j^2 - \sum_{i,j \in J'} \frac{\sqrt{a_{ij}}}{2} x_i x_j = Q_{G'}(x) - \sum_{i,j \in J'} \frac{\sqrt{a_{ij}} - \sqrt{a'_{ij}}}{2} x_i x_j \leq Q_{G'}(x).$$

ここで最後の不等式に $a_{ij} \geq a'_{ij}$ を用いた． □

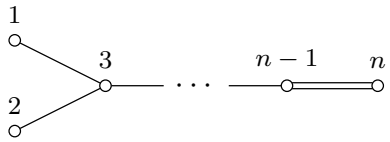
補題 4.37. グラフ G が以下のグラフ (i)–(v) のいずれかのとき，$Q_G(x) = 0$ を満たす元 $x \in \mathbb{R}^J_{>0}$ が存在する．特に Q_G は正定値でない．

(i) 

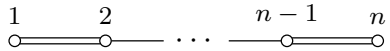
$(n \geq 3)$

(ii) 

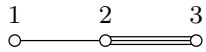
$(n \geq 5)$

(iii) 

$(n \geq 4)$

(iv) 

$(n \geq 3)$

(v) 

(vi)

Proof. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^J_{>0} = \mathbb{R}^n_{>0}$ を具体的に

$$(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} (1, 1, \ldots, 1, 1) & \text{(i) のとき,} \\ (1, 1, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1, 1) & \text{(ii) のとき,} \\ (1, 1, 2, 2, \ldots, 2, 2, \sqrt{2}) & \text{(iii) のとき,} \\ (\sqrt{2}, 2, 2, \ldots, 2, 2, \sqrt{2}) & \text{(iv) のとき,} \\ (1, 2, \sqrt{3}) & \text{(v) のとき,} \\ (1, 1) & \text{(vi) のとき,} \end{cases}$$

ととれば，直接計算で $Q_G(x) = 0$ が確かめられる． □

命題 *4.35* の証明．[(II)$\Longrightarrow$(I)] は次節 §4.5 におけるルート系 Δ の実現と式 (4.9) から従う．

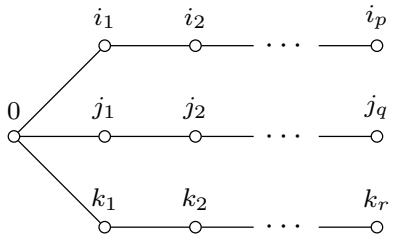
[(I)$\Longrightarrow$(II)] を示す．G は連結なグラフで，Q_G が正定値であると仮定する．このとき補題 4.36 および補題 4.37 より，グラフ G は補題 4.37 にあるグラフ (i)–(vi) を部分グラフとして含まない．ゆえに G は以下の 3 つの場合のいずれかになる．

(イ)

(ロ)

$(p \geq q \geq 0)$

(ハ)



$(p \geq q \geq r \geq 0)$

(イ) の場合：これは G_2 型のルート系 Δ の Coxeter グラフ $\bar{\Gamma}(\Delta)$ であるから，[(II)$\Longrightarrow$(I)] の証明ですでに述べた理由によって Q_G は正定値である．

(ロ) の場合：簡単のため $x_a = x_{i_a}, y_a = x_{j_a}$ とおけば，

$$Q_G(x) = \sum_{a=0}^{p} x_a^2 - \sum_{a=0}^{p-1} x_a x_{a+1} + \sum_{a=0}^{q} y_a^2 - \sum_{a=0}^{q-1} y_a y_{a+1} - \sqrt{2} x_0 y_0$$

である．ここで

$$\begin{aligned}
f_p(x) &\coloneqq \sum_{a=0}^{p} x_p^2 - \sum_{a=0}^{p-1} x_a x_{a+1} \\
&= \left(x_p - \frac{1}{2}x_{p-1}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_{p-1} - \frac{2}{3}x_{p-2}\right)^2 + \cdots + \frac{p+1}{2p}\left(x_1 - \frac{p}{p+1}x_0\right)^2 + \frac{p+2}{2(p+1)}x_0^2 \\
&= \sum_{a=0}^{p-1} \frac{p+1-a}{2(p-a)}\left(x_{a+1} - \frac{p-a}{p+1-a}x_a\right)^2 + \frac{p+2}{2(p+1)}x_0^2
\end{aligned}$$

であることに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
Q_G(x) =& f_p(x) + f_q(y) - \sqrt{2}x_0y_0 \\
=& \sum_{a=0}^{p-1} \frac{p+1-a}{2(p-a)} \left(x_{a+1} - \frac{p-a}{p+1-a} x_a \right)^2 + \sum_{a=0}^{q-1} \frac{q+1-a}{2(q-a)} \left(y_{a+1} - \frac{q-a}{q+1-a} y_a \right)^2 \\
&+ \frac{p+2}{2(p+1)} x_0^2 + \frac{q+2}{2(q+1)} y_0^2 - \sqrt{2}x_0y_0
\end{aligned}
$$

と計算できる．よって Q_G が正定値であるためには，2 変数の 2 次形式

$$
Q_{p,q}(x,y) := \frac{p+2}{2(p+1)} x^2 + \frac{q+2}{2(q+1)} y^2 - \sqrt{2}xy \tag{4.10}
$$

が正定値であることが必要十分である．これを満たすの非負整数の組 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \geq q$ を求めれば，グラフ G が B_n/C_n 型または F_4 型の Coxeter グラフに一致することが分かる（レポート問題 24(1) 参照）.

(ハ) の場合：簡単のため $x_a = x_{i_a}, y_a = x_{j_a}, z_a = x_{k_a}, y_0 = z_0 = x_0$ とおく．このとき

$$
\begin{aligned}
&Q_G(x) = f_p(x) + f_q(y) + f_r(z) - 2x_0^2 \\
&= \sum_{a=0}^{p-1} \frac{p+1-a}{2(p-a)} \left(x_{a+1} - \frac{p-a}{p+1-a} x_a \right)^2 + \sum_{a=0}^{q-1} \frac{q+1-a}{2(q-a)} \left(y_{a+1} - \frac{q-a}{q+1-a} y_a \right)^2 \\
&\quad + \sum_{a=0}^{r-1} \frac{r+1-a}{2(r-a)} \left(z_{a+1} - \frac{r-a}{r+1-a} z_a \right)^2 + \left(\frac{p+2}{2(p+1)} + \frac{q+2}{2(q+1)} + \frac{r+2}{2(r+1)} - 2 \right) x_0^2
\end{aligned}
$$

と計算できる．したがって 2 次形式 Q_G が正定値であるためには, 非負整数 $p \geq q \geq r \geq 0$ が不等式

$$
\frac{p+2}{2(p+1)} + \frac{q+2}{2(q+1)} + \frac{r+2}{2(r+1)} - 2 > 0 \tag{4.11}
$$

を満たすことが必要十分である．これを解けば，G が A_n 型，D_n 型もしくは E_n 型の Coxeter グラフに一致することが分かる（レポート問題 24(2) 参照）. □

レポート問題 24. 以下の問いに答えよ.

(1) 式 (4.10) で定義される 2 変数の 2 次形式 $Q_{p,q}(x,y)$ が正定値となるような非負整数の組 $(p,q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$（ただし $p \geq q$ とする）を全て求めよ.

(2) 不等式 (4.11) を満たす非負整数の組 $(p,q,r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$（ただし $p \geq q \geq r$ とする）を全て求めよ.

4.5 既約ルート系の具体的実現

以下，$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}e_i$ を n 次元の標準的な Euclid 空間とし，その内積は $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ によって与えられるとする．

4.5.1 A_n 型

例 4.5 で見たように，A_n 型ルート系は，$n+1$ 次元の標準的な Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元部分ベクトル空間

$$E \coloneqq \{\textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$$

において

$$\Delta = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$$

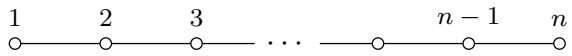
で与えられる．$\#\Delta = n(n+1)$．単純ルートの集合として，例えば

$$\Pi = \{\alpha_i \coloneqq e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

がとれる．このとき Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに Dynkin 図形は



となる．Weyl 群 $W(A_n)$ は対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ に同型である．

4.5.2 B_n 型

B_n 型ルート系は，n 次元の標準的な Euclid 空間 $E = \mathbb{R}^n$ において

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

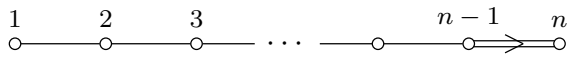
で与えられる．$\#\Delta = 2n^2$．単純ルートの集合として，例えば

$$\Pi = \{\alpha_i \coloneqq e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\alpha_n \coloneqq e_n\}$$

がとれる．このとき Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ は



となる．Weyl 群 $W(B_n)$ は符号つき置換のなす群 $\mathfrak{S}_n \ltimes \{1, -1\}^n$ に同型である．

4.5.3 C_n 型

C_n 型ルート系は，n 次元の標準的な Euclid 空間 $E = \mathbb{R}^n$ において

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

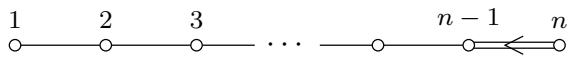
で与えられる．$\#\Delta = 2n^2$．単純ルートの集合として，例えば

$$\Pi = \{\alpha_i \coloneqq e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\alpha_n \coloneqq 2e_n\}$$

がとれる．このとき Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ は



となる．Weyl 群 $W(C_n)$ は $W(B_n)$ と同じである．

4.5.4 D_n 型

D_n 型ルート系は，n 次元の標準的な Euclid 空間 $E = \mathbb{R}^n$ において

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

で与えられる．$\#\Delta = 2n(n-1)$. 単純ルートの集合として，例えば

$$\Pi = \{\alpha_i \coloneqq e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\alpha_n \coloneqq e_{n-1} + e_n\}$$

がとれる．このとき Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ は

となる．Weyl 群 $W(D_n)$ は $\mathfrak{S}_n \ltimes \{1, -1\}^n$ の部分群

$$\{(g, (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) \in \mathfrak{S}_n \ltimes \{\pm 1\}^n \mid \textstyle\prod_{i=1}^n \sigma_i = 1\}$$

に同型である．

4.5.5 G_2 型

G_2 型ルート系は，3 次元の標準的な Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分ベクトル空間

$$E \coloneqq \{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

において

$$\Delta = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq 3\} \cup \{\pm(2e_i - e_j - e_k) \mid \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\}$$

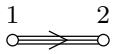
で与えられる．$\#\Delta = 12$. 単純ルートの集合として，例えば

$$\Pi = \{\alpha_1 \coloneqq -2e_1 + e_2 + e_3, \quad \alpha_2 \coloneqq e_1 - e_2\}$$

がとれる．このとき Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ は



となる．

4.5.6 F_4 型

F_4 型ルート系は，4 次元の標準的な Euclid 空間 $E = \mathbb{R}^4$ において

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^4 \sigma_i e_i \mid (\sigma_i) \in \{\pm 1\}^4\}$$

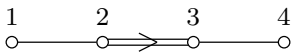
で与えられる．$\#\Delta = 48$. 単純ルートの集合として，例えば

$$\Pi = \{\alpha_1 \coloneqq e_2 - e_3, \quad \alpha_2 \coloneqq e_3 - e_4, \quad \alpha_3 \coloneqq e_4, \quad \alpha_4 \coloneqq \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\}$$

がとれる．このとき Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ は



となる．

4.5.7 E_n 型

E_8 型ルート系は，8 次元の標準的な Euclid 空間 $E = \mathbb{R}^8$ において

$$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \{\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^8 \sigma_i e_i \mid (\sigma_i) \in \{\pm 1\}^8, \prod_{i=1}^8 \sigma_i = 1\}$$

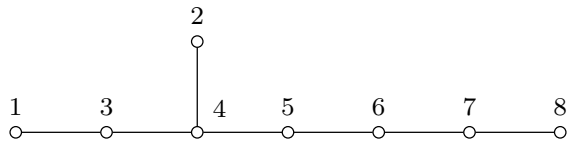
で与えられる．$\#\Delta = 240$. 単純ルートの集合として，例えば

$$\begin{aligned}\Pi = \{&\alpha_1 \coloneqq \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8), \quad \alpha_2 \coloneqq e_1 + e_2\} \\ &\cup \{\alpha_i \coloneqq e_{i-1} - e_{i-2} \mid 3 \le i \le 8\}\end{aligned}$$

がとれる．このとき Cartan 行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに Dynkin 図形 $\Gamma(\Delta)$ は



となる．E_6 型および E_7 型ルート系は E_8 型ルート系の部分集合として実現できる．すなわち

$$\begin{aligned}\Delta' &\coloneqq \Delta \cap \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_7\} \\ &= \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\} \\ &\quad \cup \{\pm\tfrac{1}{2}(e_8 - e_7 + \textstyle\sum_{i=1}^{6} \sigma_i e_i) \mid (\sigma_i) \in \{\pm 1\}^6, \prod_{i=1}^{6} \sigma_i = -1\}\end{aligned}$$

が E_7 型のルート系を与え，

$$\begin{aligned}\Delta'' &\coloneqq \Delta \cap \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\} \\ &= \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le 5\} \\ &\quad \cup \{\pm\tfrac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \textstyle\sum_{i=1}^{5} \sigma_i e_i) \mid (\sigma_i) \in \{\pm 1\}^5, \prod_{i=1}^{5} \sigma_i = 1\}\end{aligned}$$

が E_6 型ルート系を与える．ルートの個数はそれぞれ $\#\Delta' = 126$, $\#\Delta'' = 72$ である．

レポート問題 25. Euclid 空間 E の中の階数 n のルート系 Δ を考える．各ルート $\alpha \in \Delta$ に対し

$$\alpha^\vee = \frac{2}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 集合 $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\} \subset E$ は再び階数 n のルート系をなすことを示せ．ルート系 $\Delta^\vee$ を Δ の双対ルート系と呼ぶ．

(2) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ がルート系 Δ の単純ルートの集合であるとき，$\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\} \subset \Delta^\vee$ は双対ルート系 $\Delta^\vee$ の単純ルートの集合を与えることを示せ．

(3) Dynkin 図形を比較することによって，B_n 型ルート系の双対ルート系は C_n 型ルート系（に同型）であることを示せ．他方，$X \in \{A, D, E, F, G\}$ に対し，X_n 型ルート系の双対ルート系は再び X_n 型ルート系（に同型）であることを示せ．

■**余談**　ルート系および Dynkin 図形は，Lie 代数の理論のみならず，現代数学の様々なトピックにしばしば現れる．例えば

(1) 箙（quiver, 有向グラフ）の表現論；

(2) 単純特異点の分類；

(3) 有限型の団代数 (cluster algebra) の分類，など．

これらについては例えば以下の参考文献（日本語）がある．

(1) 草場公邦，「行列特論」（第 2 章：ガブリエルの定理），裳華房，基礎数学選書 21，1979 年．

(2) 松澤淳一，「特異点とルート系」，朝倉書店，すうがくの風景 6，2002 年．

(3) 中島啓，「ディンキン図式をめぐって–数学におけるプラトン哲学」，数理解析研究所第 31 回数学入門公開講座，2009 年．講義ノートへのリンク

4.6　補足：Weyl 群の元の長さ

$\Delta \subset E$ をルート系，$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ をその単純ルートの集合とし，Δ^+, Δ^- をそれぞれ対応する正ルート，負ルートの集合とする，上と同様に $s_i := s_{\alpha_i}$ $(1 \le i \le n)$ を単純鏡映とする．Weyl 群 $W(\Delta)$ の任意の元 w を単純鏡映の積として

$$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l} \qquad (1 \le i_1, i_2, \ldots, i_l \le n)$$

と表示することができる．そのような表示のうち，$l \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が最小であるような表示を，w の**簡約表示** (reduced expression) と呼び，そのときの l を w の**長さ** (length) と呼んで $\ell(w)$ と書く．長さは単純ルートの集合 Π のとり方に依存して定義されることに注意する．定義より，$\ell(w) = 0$ であることと，w が単位元 id であることは同値である．

命題 4.38. 任意の $w \in W(\Delta)$ に対し，$\ell(w) = \#(w\Delta^+ \cap \Delta^-)$ が成り立つ．

Proof. $n(w) := \#(w\Delta^+ \cap \Delta^-)$ とおいて，$\ell(w) = n(w)$ が成り立つことを $\ell(w)$ に関する帰納法で証明する．$\ell(w) = 0$ のときは，w は単位元なので $n(w) = 0$ だからよい．$l := \ell(w) > 0$ のとき，w の簡約表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ をひとつ選び，$v := s_{i_1} \cdots s_{i_{l-1}}$ とおく．このとき $\ell(v) = l - 1$ であるから，帰納法の仮定より，$\ell(v) = n(v) = l - 1$ が成り立つ．よって $n(w) = n(v) + 1$ を示せば良い．補題 4.21 より

$$\begin{aligned} w\Delta^+ &= v(s_{i_l}\Delta^+) \\ &= v\big((\Delta^+ \setminus \{\alpha_{i_l}\}) \cup \{-\alpha_{i_l}\}\big) \\ &= (v\Delta^+ \setminus \{v\alpha_{i_l}\}) \cup \{-v\alpha_{i_l}\} \end{aligned}$$

であるから，

$$n(w) = \begin{cases} n(v) + 1 & (v\alpha_{i_l} \in \Delta^+ \text{ のとき}), \\ n(v) - 1 & (v\alpha_{i_l} \in \Delta^- \text{ のとき}) \end{cases}$$

が分かる．

ここで $v\alpha_{i_l} \in \Delta^-$ とすると矛盾を生じることを示そう．実際，仮定 $v\alpha_{i_l} \in \Delta^-$ の下で

$$m := \max\{k \in \{1, \ldots, l-1\} \mid s_{i_k} s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_{l-1}} \alpha_{i_l} \in \Delta^-\}$$

が定まる．このとき $s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_{l-1}} \alpha_{i_l} \in \Delta^+$ は s_{i_m} によって負ルートにうつる正ルートである．よって補題 4.21 より，$s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_{l-1}} \alpha_{i_l} = \alpha_{i_m}$ でなくてはならない．このとき補題 4.1(4) を $g = s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_{l-1}}$ に適用して，$s_{i_m} = s_{g\alpha_{i_l}} = g s_{i_l} g^{-1}$, すなわち

$$s_{i_m}(s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_{l-1}}) = (s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_{l-1}}) s_{i_l}$$

を得る．このとき

$$\begin{aligned} w &= s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}} (s_{i_m} s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_{l-1}}) s_{i_l} \\ &= s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}} (s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_{l-1}} s_{i_l}) s_{i_l} \\ &= s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}} s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_{l-1}} \end{aligned}$$

となる．これは $\ell(w) = l$ に反する． □

系 4.39. Weyl 群の元 $w \in W(\Delta)$ について，次が成り立つ：

$$w\Pi = \Pi \quad \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \quad w\Delta^+ = \Delta^+ \quad \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \quad w = \mathsf{id}.$$

Proof. 最初の同値性は $\Pi = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \nexists \beta_1, \beta_2 \in \Delta^+ \text{ s.t. } \alpha = \beta_1 + \beta_2\}$ より，2 番目の同値性は命題 4.38 より従う． □

系 4.40. Weyl 群 $W(\Delta)$ の元 w_0 であって，条件 $w_0\Delta^+ = \Delta^-$ を満たすものがただひとつ存在する．またこのとき $w_0^2 = \mathsf{id}$ が成り立つ．

Proof. 元 $w \in W(\Delta)$ について，$w\Delta^+ \neq \Delta^-$ ならば，ある単純ルート $\alpha_i \in \Pi$ があって $w\alpha_i \in \Delta^+$ を満たす．このとき命題 4.38 と補題 4.21 より $\ell(ws_i) = \ell(w) + 1$ となる．よって $w_0 \in W(\Delta)$ を $\ell(w_0) = \max\{\ell(w) \mid w \in W(\Delta)\}$ なる元とすれば，$w_0\Delta^+ = \Delta^-$ を満たす．w_0^2 は Δ^+ を保つので，系 4.39 より $w_0^2 = \mathsf{id}$ となる．またもうひとつの元 $w_0' \in W(\Delta)$ が同じ条件 $w_0'\Delta^+ = \Delta^-$ を満たすならば，積 w_0w_0' は Δ^+ を保つ．よって再び系 4.39 より $w_0w_0' = \mathsf{id}$ となる．これから一意性が従う． □

系 4.40 の w_0 を Weyl 群 $W(\Delta)$ の**最長元** (longest element) という．

5　普遍包絡環

複素 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，その普遍包絡環と呼ばれる $\mathbb{C}$ 代数 $U(\mathfrak{g})$ が自然に考えられる．ここで $\mathbb{C}$ 代数とは，複素数体 $\mathbb{C}$ をその中心に含む環（結合的多元環）のことである．普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を用いることにより，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現論は $U(\mathfrak{g})$ 上の加群の理論と等価である．これは有限群の表現論が群代数（群環）上の加群の理論と等価であることと同様である．環上の加群の言葉に翻訳することで，環論の様々な技法を適用することができて便利である．

5.1　$\mathbb{C}$ 代数

以下簡単のため，ベクトル空間は全て複素ベクトル空間であるとする．また，テンソル積 $\otimes$ は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上のテンソル積 $\otimes_{\mathbb{C}}$ を意味するものとする．

定義 5.1 ($\mathbb{C}$ 代数)**.** ベクトル空間 A は，積と呼ばれる双線形写像

$$A \times A \to A; \qquad (x, y) \mapsto xy$$

が与えられ，以下の性質を満たすとき，$\mathbb{C}$ **代数** ($\mathbb{C}$-algebra) であるという．

(1) 結合律：任意の $x, y, z \in A$ について $(xy)z = x(yz)$ が成り立つ；
(2) 単位元の存在：ある元 $1_A \in A$ が（ただひとつ）存在して，任意の $x \in A$ について $x = x1_A = 1_A x$ を満たす．

2 つの $\mathbb{C}$ 代数 A, B に対し，線形写像 $f\colon A \to B$ は積および単位元と整合的であるとき，すなわち条件

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (\forall x, y \in A), \qquad f(1_A) = 1_B$$

を満たすとき，$\mathbb{C}$ **代数準同型** ($\mathbb{C}$algebra homomorphism) であるという．

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(A, B) \coloneqq \{f\colon A \to B \mid f \text{ は } \mathbb{C} \text{ 代数準同型 }\}$$

とおく[*22]．可逆な準同型を $\mathbb{C}$ 代数の同型という．A から B への $\mathbb{C}$ 代数の同型が存在するとき，A と B は $\mathbb{C}$ 代数として同型であるといい，$A \cong B$ と書く．

[*22] Lie 代数のときと違ってこれは単なる集合であって，自然なベクトル空間の構造を持たないので注意．

例 5.2. 複素数体 $\mathbb{C}$ 自身は，通常の積により $\mathbb{C}$ 代数である．A が $\mathbb{C}$ 代数であるとき，写像 $\mathbb{C} \to A$, $c \mapsto c1_A$ は単射準同型である．以下，これによって複素数体 $\mathbb{C}$ を A の部分集合と同一視する．特に，単に $1_A = 1$ と書く．

例 5.3 (End 環)**.** 任意のベクトル空間 V について，V 上の自己線形写像全体のなすベクトル空間 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ は，写像の合成を積として $\mathbb{C}$ 代数である．

例 5.4 (多項式環)**.** N 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ の $\mathbb{C}$ 係数多項式全体

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_N]$$

は通常の多項式の積に関して $\mathbb{C}$ 代数となる．これは可換な $\mathbb{C}$ 代数である．ベクトル空間としては無限次元であり，基底として単項式全体の集合

$$\{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq N\}$$

がとれる．

例 5.5 (自由代数/非可換多項式環)**.** N 個の記号 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ からなる語全体の集合

$$\{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq N\}$$

を基底とするベクトル空間

$$\mathbb{C}\langle x_1, x_2, \ldots, x_N \rangle \coloneqq \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \bigoplus_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq N} \mathbb{C} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$$

は，積を語の結合

$$(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}) \cdot (x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_l}) \coloneqq x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_l}$$

によって定めることで $\mathbb{C}$ 代数となる．これを**自由代数** (free algebra) または**非可換多項式環** (non-commutative polynomial ring) という．

命題 5.6. 任意の $\mathbb{C}$ 代数 A について，次の全単射がある：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_N \rangle, A) \xrightarrow{1:1} A^N; \qquad f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_N)).$$

Proof. $a = (a_1, \ldots, a_N) \in A^N$ に対して，$\mathbb{C}$ 線形写像 $\mathsf{ev}_a \colon \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_N \rangle \to A$ を

$$\mathsf{ev}_a(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}) \coloneqq a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} \qquad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq N)$$

によって定めれば，ev_a は $\mathbb{C}$ 代数準同型である．対応 $a \mapsto \mathsf{ev}_a$ が逆写像を与える． □

例 5.7 (テンソル代数)**.** ベクトル空間 V と非負整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，テンソル冪

$$V^{\otimes m} := \begin{cases} \mathbb{C} & (m = 0 \text{ のとき}), \\ \overbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}^{m \text{ 個}} & (m > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える．これらを全て直和して得られベクトル空間

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes m}$$

は，積をテンソルの結合

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_l) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_l$$

によって定めることで，$\mathbb{C}$ 代数となる．これを**テンソル代数** (tensor algebra) という．

$\dim V = N$ のとき，V の基底 $\{x_1, \ldots, x_N\}$ をひとつ選ぶと，$V^{\otimes m}$ は

$$\{x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_m} \mid 1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq N\}$$

を基底とする N^m 次元のベクトル空間である．ゆえに $\mathbb{C}$ 代数の同型

$$T(V) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}\langle x_1, x_2, \ldots, x_N \rangle; \qquad x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_m} \mapsto x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$$

がある．

命題 5.8. 任意のベクトル空間 V と $\mathbb{C}$ 代数 A に対して，次の自然な全単射がある[*23]：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(T(V), A) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, A); \qquad f \mapsto f|_V.$$

Proof. 線形写像 $g \colon V \to A$ に対して，線形写像 $\tilde{g} \colon T(V) \to A$ を

$$\tilde{g}(1) := 1, \qquad \tilde{g}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m) := g(v_1) g(v_2) \cdots g(v_m) \qquad (v_1, v_2, \ldots, v_m \in V)$$

によって定義すれば，$\tilde{g}$ は $\mathbb{C}$ 代数準同型である．対応 $g \mapsto \tilde{g}$ が逆写像を与える． □

定義 5.9 (イデアル/商代数)**.** $\mathbb{C}$ 代数 A の部分ベクトル空間 J が，条件

$$x \in J, a \in A \Longrightarrow ax, xa \in J$$

[*23] 圏論の言葉を用いて言い換えれば，関手 $V \mapsto T(V)$ は，$\mathbb{C}$ 代数の圏からベクトル空間の圏への忘却関手の左随伴関手である．

を満たすとき，J は A の**（両側）イデアル** (two-sided ideal) であるという．J が A のイデアルであるとき，商ベクトル空間 A/J に積を

$$(a+J)(b+J) \coloneqq ab+J \qquad (a,b \in A)$$

と定めることで，A/J は $\mathbb{C}$ 代数となる（積が well-defined であることは容易にチェックできる）．これを A の J による**商** (quotient) という．明らかに，商写像

$$\pi_J \colon A \to A/J; \qquad a \mapsto a+J$$

は $\mathbb{C}$ 代数準同型である．

命題 5.10. 2 つの $\mathbb{C}$ 代数 A, B と，A のイデアル J について，次の全単射がある：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(A/J, B) \xrightarrow{1:1} \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(A,B) \mid f(J) = \{0\}\}; \qquad g \mapsto g \circ \pi_J.$$

Proof. $\mathbb{C}$ 代数準同型 $f \colon A \to B$ で $f(J) = \{0\}$ を満たすものに対し，

$$\bar{f}(a+J) \coloneqq f(a) \qquad (a \in A)$$

とおけば，$\bar{f}$ は $\mathbb{C}$ 代数準同型 $A/J \to B$ を定める．対応 $f \mapsto \bar{f}$ が逆写像を与える． □

定義 5.11. 部分集合 $R \subset A$ に対し，

$$\langle R \rangle \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{arb \mid a, b \in A, r \in R\} \subset A$$

とおけば，$\langle R \rangle$ は A のイデアルとなる．これを R の生成するイデアルという．簡単のため，$R = \{r_1, r_2, \ldots\}$ のとき，$\langle R \rangle = \langle r_1, r_2, \ldots \rangle$ などと書く．

系 5.12. 2 つの $\mathbb{C}$ 代数 A, B と，A の部分集合 R について，次の全単射がある：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(A/\langle R \rangle, B) \xrightarrow{1:1} \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(A,B) \mid f(R) = \{0\}\}; \qquad g \mapsto g \circ \pi_{\langle R \rangle}.$$

Proof. $\mathbb{C}$ 代数準同型 $f \colon A \to B$ について，条件 $f(\langle R \rangle) = \{0\}$ と条件 $f(R) = \{0\}$ が同値であることに注意すれば良い． □

例 5.13. 非可換多項式環 $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_N \rangle$ において，集合

$$R \coloneqq \{x_i x_j - x_j x_i \mid 1 \le i < j \le N\}$$

で生成されるイデアル

$$\langle R \rangle = \langle x_i x_j - x_j x_i \mid 1 \le i < j \le N \rangle$$

を考える．このとき命題 5.10 と命題 5.6 より，$\mathbb{C}$ 代数準同型

$$f\colon \mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle/\langle R\rangle \to \mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]; \qquad \pi_{\langle R\rangle}(x_k)\mapsto x_k \qquad (k=1,\dots,N)$$

がある．f は同型である．実際，任意の $1\le i_1,\dots,i_m\le N$ と $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ に対して

$$\pi_{\langle R\rangle}(x_{i_1}\cdots x_{i_m}) = \pi_{\langle R\rangle}(x_{i_{\sigma(1)}}\cdots x_{i_{\sigma(m)}})$$

であるから，集合 $M\coloneqq\{\pi_{\langle R\rangle}(x_{i_1}\cdots x_{i_m})\mid m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}, 1\le i_1\le\cdots\le i_m\le N\}$ はベクトル空間 $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle/\langle R\rangle$ を張る．一方で，構成から

$$f(\pi_{\langle R\rangle}(x_{i_1}\cdots x_{i_m})) = x_{i_1}\cdots x_{i_m} \qquad (m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}, 1\le i_1\le\cdots\le i_m\le N)$$

なので，f は集合 M と単項式の集合 $\{x_{i_1}\cdots x_{i_m}\mid m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}, 1\le i_1\le\cdots\le i_m\le N\}\subset\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$ のあいだの全単射を引き起こす．後者は多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$ の基底だったので，集合 M は一次独立，ゆえに商代数 $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle/\langle R\rangle$ の基底をなす．よって f は基底のあいだの全単射を引き起こすから線型同型，ゆえに $\mathbb{C}$ 代数の同型である．

定義 5.14 (代数の表示)**.** $\mathbb{C}$ 代数 A の N 個の元 $a_1,\dots,a_N$ が与えられたとき，命題 5.6 により $a=(a_1,\dots,a_N)\in A^N$ に対して $\mathbb{C}$ 代数準同型

$$\mathsf{ev}_a\colon \mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle\to A; \qquad x_k\mapsto a_k \quad (1\le k\le N)$$

が定まる．写像 ev_a が全射であるとき，$a_1,\dots,a_N$ は $\mathbb{C}$ 代数 A を**生成する** (generate) という．このときさらに，元 $l_1,l_2,\dots,r_1,r_2\ldots\in\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle$ によって

$$\mathrm{Ker}(\mathsf{ev}_a) = \langle l_1-r_1, l_2-r_2,\dots\rangle,$$

と書けるならば，$\mathbb{C}$ 代数 A は生成元 $a_1,\dots,a_N$ と関係式

$$l_1|_{x=a} = r_1|_{x=a}, \quad l_2|_{x=a} = r_2|_{x=a}, \quad \dots$$

による**表示** (presentation) を持つという．ただしここで，$F|_{x=a}$ は，非可換多項式 $F\in\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle$ の各変数 x_k を形式的に a_k に置き換えて書き表したものを意味する．$\mathbb{C}$ 代数の準同型定理により，このとき ev_a は同型

$$\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle/\langle l_1-r_1, l_2-r_2,\dots\rangle\cong A$$

を導く．

例 5.15. 例 5.13 より，多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$ は，生成元 $x_1,\dots,x_N$ と関係式

$$x_ix_j = x_jx_i \qquad (1\le i<j\le N)$$

による表示を持つ．

5.2 Lie 代数の普遍包絡環

以下，$\mathfrak{g}$ は複素 Lie 代数であるとする．

定義 5.16 (普遍包絡環)**.** テンソル代数 $T(\mathfrak{g})$ のイデアル

$$J_{\mathfrak{g}} \coloneqq \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g} \rangle$$

を考える．このとき $T(\mathfrak{g})$ の $J_{\mathfrak{g}}$ による商

$$U(\mathfrak{g}) \coloneqq T(\mathfrak{g})/J_{\mathfrak{g}}$$

を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**普遍包絡環** (universal enveloping algebra) という．このとき，包含写像 $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$ と商写像 $T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ の合成によって，自然な線型写像

$$\iota_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$$

が定義される．

注意 5.17. 写像 $\iota_{\mathfrak{g}}$ は単射であることが分かる（例えば定理 5.27 を参照）．そこで，以下では $x \in \mathfrak{g}$ と $\iota_{\mathfrak{g}}(x) \in U(\mathfrak{g})$ をしばしば同一視する．

注意 5.18 (構造定数と $U(\mathfrak{g})$ の表示)**.** $N = \dim \mathfrak{g}$ とし，$\mathfrak{g}$ の基底 $x_1, \ldots, x_N$ をひとつ選ぶ．このとき式

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{N} a_{i,j}^k x_k \qquad (1 \leq i, j \leq N)$$

によって，複素数の組 $\{a_{i,j}^k\}_{1 \leq i,j,k \leq N}$ が定まる．これを Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$ に関する**構造定数** (structure constant) という．

例 5.7 で見たように，$\mathbb{C}$ 代数の同型 $T(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_N \rangle$ がある．この同型のもとでテンソル代数 $T(\mathfrak{g})$ のイデアル $J_{\mathfrak{g}}$ は，自由代数 $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_N \rangle$ のイデアル

$$\langle x_i x_j - x_j x_i - \textstyle\sum_{k=1}^{N} a_{i,j}^k x_k \mid 1 \leq i, j \leq N \rangle$$

に写る．したがって，$U(\mathfrak{g})$ は生成元 $x_1, \ldots, x_N$ と関係式

$$x_i x_j - x_j x_i = \sum_{k=1}^{N} a_{i,j}^k x_k \qquad (1 \leq i, j \leq N)$$

による表示を持つ．

レポート問題 26. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{x_i\}_{1\le i\le N}$ に関する構造定数 $\{a_{i,j}^k\}_{1\le i,j,k\le N}$ は以下の等式 (1), (2) を満たすことを示せ：任意の $1\le i,j,k,l\le N$ について

(1) $a_{i,j}^k = -a_{j,i}^k$,
(2) $\sum_{m=1}^N (a_{i,m}^l a_{j,k}^m + a_{j,m}^l a_{k,i}^m + a_{k,m}^l a_{i,j}^m) = 0$.

例 5.19 (可換 Lie 代数の場合)**.** 可換 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{a})$ は可換 $\mathbb{C}$ 代数である．$\dim\mathfrak{a} = N$ のとき，$\mathfrak{a}$ の基底 $x_1,\dots,x_N$ を選べば，$\mathbb{C}$ 代数の同型 $U(\mathfrak{a})\cong\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$ を得る．

例 5.20 ($\mathfrak{sl}_2$ の場合)**.** $U(\mathfrak{sl}_2)$ は生成元 e,f,h と関係式

$$he - eh = 2e, \qquad hf - fh = -2f, \qquad ef - fe = h$$

による表示を持つ．

次に普遍包絡環の普遍性について述べる．

補題 5.21. A を $\mathbb{C}$ 代数とする．ベクトル空間 A は双線形写像

$$[-,-]\colon A\times A\to A; \qquad [x,y] \coloneqq xy - yx$$

を Lie 括弧として Lie 代数になる．以下これを A_{Lie} と書く．

レポート問題 27. 補題 5.21 を証明せよ．

例 5.22. 任意のベクトル空間 V について，定義より $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)_{\mathsf{Lie}}$ である．

以下，Lie 代数 $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ について，$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{h}$ への Lie 代数の準同型全体の成す集合（ベクトル空間）を $\mathrm{End}_{\mathsf{Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ と書く．

命題 5.23 (普遍包絡環の普遍性)**.** 任意の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathbb{C}$ 代数 A について，次の自然な全単射がある[*24]：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(U(\mathfrak{g}),A) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Lie}}(\mathfrak{g},A_{\mathsf{Lie}}); \qquad f\mapsto f\circ\iota_{\mathfrak{g}}.$$

[*24] 圏論の言葉を用いて言い換えれば，Lie 代数の圏から $\mathbb{C}$ 代数の圏への関手 $\mathfrak{g}\mapsto U(\mathfrak{g})$ は，関手 $A\mapsto A_{\mathsf{Lie}}$ の左随伴関手である．$\mathfrak{g}\mapsto U(\mathfrak{g})$ が関手であることは，下記のレポート問題 28 も参照．

Proof. 次の可換図式から分かる：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(T(\mathfrak{g}), A) \arrow[r, "1:1", "\text{命題 } 5.8"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, A) \\
\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(T(\mathfrak{g}), A) \mid (\star)\} \arrow[u, hook, "\text{包含}"] \arrow[r, "1:1"] \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"', "\text{命題 } 5.10"] & \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, A) \mid (\star)\} \arrow[u, hook, "\text{包含}"'] \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(U(\mathfrak{g}), A) \arrow[r, "f \mapsto f \circ \iota_{\mathfrak{g}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{Lie}}(\mathfrak{g}, A_{\mathsf{Lie}}).
\end{tikzcd}$$

ただしここで $(\star)$ は条件

$$(\star): \quad f([x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x) \quad (\forall x, y \in \mathfrak{g})$$

を表す． □

定義 5.24 (代数上の加群)**.** A は $\mathbb{C}$ 代数であるとする．ベクトル空間 V は，$\mathbb{C}$ 代数の準同型写像 $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が与えられているとき，（左）A **加群** (A-module) であるという．このとき $av := \varphi(a)(v)$ として，双線形写像

$$A \times V \to V; \qquad (a, v) \mapsto av \tag{5.1}$$

が定まり，条件

$$a(bv) = (ab)v \qquad (a, b \in A, v \in V)$$

を満たす．

逆にこの条件を満たす双線形写像 (5.1) が与えられているとき，$\varphi(a)(v) := av$ として $\mathbb{C}$ 代数準同型 $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が定まる．よって A 加群とは，上の条件を満たす双線形写像 (5.1) を備えたベクトル空間 V のことであると思える．

系 5.25 ($\mathfrak{g}$ の表現と $U(\mathfrak{g})$ 加群の同一視)**.** 任意のベクトル空間 V に対して，次の自然な全単射がある：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathsf{alg}}(U(\mathfrak{g}), \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V)); \qquad \varphi \mapsto \varphi \circ \iota_{\mathfrak{g}}.$$

したがって，次の自然な対応を得る：

$$\{\text{ Lie 代数 } \mathfrak{g} \text{ の表現 }\} \xleftrightarrow{1:1} \{\ U(\mathfrak{g}) \text{ 加群 }\}; \qquad (V, \rho) \mapsto (V, \tilde{\rho}). \tag{5.2}$$

ただしここで，Lie 代数の準同型 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ に対し，$\tilde{\rho}\colon U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$ は $\tilde{\rho} \circ \iota_{\mathfrak{g}} = \rho$ を満たす $\mathbb{C}$ 代数準同型である．

注意 5.26. 上の対応 (5.2) において，$\mathfrak{g}$ の表現 (V, ρ) の部分表現と，$U(\mathfrak{g})$ 加群 $(V, \tilde{\rho})$ の部分加群は自然に対応する．したがって特に，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の既約表現と既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群（単純 $U(\mathfrak{g})$ 加群とも言う）は自然に対応する．

そういうわけで，Lie 代数の $\mathfrak{g}$ の表現と普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ 上の加群は，同じものである．以下では両者を同一視し，必要に応じて $\mathfrak{g}$ の表現と言ったり，$U(\mathfrak{g})$ 加群と言ったりする．原理的には言葉としてどちらを選んでも同じだが，普遍包絡環を用いたほうが環論の様々な技法が使えて効率的なことが多い．

普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ については，次の **Poincaré–Birkhoff–Witt の定理**（略して **PBW 定理**）が非常に基本的かつ重要である．簡単のためここでは $\mathfrak{g}$ が有限次元のときに限定して述べるが，無限次元でも全く同様の主張が成り立つ．

定理 5.27 (PBW 定理)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ を任意に選ぶ．このとき集合

$$\{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq N\} \subset U(\mathfrak{g})$$

は，普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}$ 上の基底を与える．

証明は難しくないが，本講義では時間的余裕がないため残念ながら割愛する．興味のある方は [2, §17] などを参照してください．

例 5.28. $U(\mathfrak{sl}_2)$ の基底として，例えば集合 $\{f^a h^b e^c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ がとれる．

レポート問題 28. $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ は有限次元 Lie 代数，$\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ は Lie 代数の準同型であるとする．このとき，次の図式を可換にする $\mathbb{C}$ 代数準同型 $\tilde{\varphi}\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ がただひとつ存在することを示せ：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{g}}"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{h}}"] \\ U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & U(\mathfrak{h}). \end{tikzcd}$$

このとき，さらに以下を示せ：

(1) φ が単射であることと $\tilde{\varphi}$ が単射であることは同値である．
(2) φ が全射であることと $\tilde{\varphi}$ が全射であることは同値である．

5.3 Lie 代数の表示

定義 5.29 (自由 Lie 代数)**.** 非可換多項式環に付随する Lie 代数 $\mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle_{\mathsf{Lie}}$ において，元 $x_1,\dots,x_N$ を含む最小の部分 Lie 代数，すなわち

$$\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_N) \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{[x_{i_1},[x_{i_2},\dots[x_{i_{m-1}},x_{i_m}]\dots]] \mid m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, 1\leq i_1,i_2,\dots,i_m\leq N\}$$

を，$x_1,\dots,x_N$ で生成される**自由 Lie 代数** (free Lie algebra) という．

命題 5.30. 任意の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について，次の全単射がある：

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Lie}}(\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_N),\mathfrak{g}) \xrightarrow{1:1} \mathfrak{g}^N; \qquad \varphi\mapsto(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_N)).$$

Proof. 任意の元 $a=(a_1,\dots,a_N)\in\mathfrak{g}^N\subset U(\mathfrak{g})^N$ に対して，命題 5.6 より $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\mathsf{ev}_a\colon \mathbb{C}\langle x_1,\dots,x_N\rangle\to U(\mathfrak{g})$ であって，$\mathsf{ev}_a(x_k)=a_k$ $(k=1,\dots,N)$ を満たすものがただひとつ存在する．ev_a の $\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_N)$ への制限は $\mathfrak{g}$ に値を取り，Lie 代数の準同型 $\mathsf{ev}_a\colon\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_N)\to\mathfrak{g}$ を導く．この対応 $a\mapsto\mathsf{ev}_a$ が逆写像を与える． □

定義 5.31 (Lie 代数の表示)**.** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $R\subset\mathfrak{g}$ に対し，

$$\langle R\rangle_{\mathsf{Lie}} \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{[a_1,[a_2,\dots,[a_m,r]\dots]] \mid m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, a_1,\dots,a_m\in\mathfrak{g}, r\in R\}$$

とおく．これは R を含む最小の $\mathfrak{g}$ のイデアル[*25]である．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の N 個の元 $a_1,\dots,a_N$ が与えられたとき，命題 5.30 により $a=(a_1,\dots,a_N)\in\mathfrak{g}^N$ に対して Lie 代数の準同型

$$\mathsf{ev}_a\colon\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_N)\to\mathfrak{g}; \qquad x_k\mapsto a_k \quad (1\leq k\leq N)$$

が定まる．写像 ev_a が全射であるとき，$a_1,\dots,a_N$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を**生成する** (generate) という[*26]．このときさらに，元 $l_1,l_2,\dots,r_1,r_2\dots\in\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_N)$ によって

$$\mathrm{Ker}(\mathsf{ev}_a)=\langle l_1-r_1,l_2-r_2,\dots\rangle_{\mathsf{Lie}},$$

と書けるならば，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は生成元 $a_1,\dots,a_N$ と関係式

$$l_1|_{x=a}=r_1|_{x=a}, \quad l_2|_{x=a}=r_2|_{x=a}, \quad \dots$$

[*25] $\mathbb{C}$ 代数のイデアルではなく，Lie 代数のイデアルである．定義 3.1 を思い出そう．

[*26] 構成から $\mathrm{Im}(\mathsf{ev}_a)$ は $a_1,\dots,a_N$ を含む $\mathfrak{g}$ の最小の部分 Lie 代数である．

による**表示** (presentation) を持つという．Lie 代数の準同型定理（補題 3.2）により，このとき ev_a は同型

$$\mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_N)/\langle l_1 - r_1, l_2 - r_2, \ldots \rangle \cong \mathfrak{g}$$

を導く．

6　半単純 Lie 代数の有限次元表現論

6.1　三角分解と Serre の定理

以後，$\mathfrak{g}$ は複素有限次元半単純 Lie 代数であるとし，その Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ を固定する．$n \coloneqq \operatorname{rk} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ とおく．§3.5 のように，ルート空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \tag{6.1}$$

を考える．ただし，

$$\begin{gathered} \mathfrak{g}_\alpha \coloneqq \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x,\ \forall h \in \mathfrak{h}\}, \\ \Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \coloneqq \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\} \end{gathered}$$

である．Δ は Euclid 空間 $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \coloneqq \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \Delta$ において定義 4.2 の意味でルート系をなすのだった（定理 4.3）．

さらに単純ルートの集合 $\Pi \coloneqq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Delta$ も固定する．公理 (S1) より Π は複素ベクトル空間 $\mathfrak{h}^*$ の基底をなす．また，$\Delta^+ \coloneqq \Delta \cap (\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i)$ および $\Delta^- \coloneqq -\Delta^+$ をそれぞれ Π から定まる正ルートの集合，負ルートの集合とすれば，公理 (S2) より $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ が成り立つ．

ここで部分ベクトル空間 $\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^- \subset \mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{n}^\pm \coloneqq \bigoplus_{\alpha \in \Delta^\pm} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{（複号同順）}$$

によって定める．$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ だったので，$\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-$ はともに $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であり，分解 (6.1) より，ベクトル空間として

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \tag{6.2}$$

となる．直和分解 (6.2) を半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**三角分解** (triangular decomposition) という．これは $\mathfrak{sl}_2$ の分解 $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e$ の一般化である．

次に，各正ルート $\alpha \in \Delta^+$ に対し，ルートベクトル $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(e_\alpha, f_\alpha) = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \tag{6.3}$$

を満たすように選び，以後固定する（$\kappa_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式）．このとき，

$$[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha \coloneqq \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \nu^{-1}(\alpha) \tag{6.4}$$

が成り立つのであった．ただし，$\nu\colon \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$ は $\nu(h)(h') \coloneqq \kappa_{\mathfrak{g}}(h, h')$, $h, h' \in \mathfrak{h}$ によって定まる線型同型であった．ここで e_α, f_α は零でないので，$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}e_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathbb{C}f_\alpha$ であることに注意しよう．ゆえに，集合 $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+\}, \{f_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+\}$ はそれぞれ複素ベクトル空間 $\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-$ の基底をなす．

また，単純ルート $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ については，簡単のため

$$e_i \coloneqq e_{\alpha_i}, \qquad f_i \coloneqq f_{\alpha_i}, \qquad h_i \coloneqq h_{\alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6.5}$$

と略記する．これらを $\mathfrak{g}$ の **Chevalley 生成元** (Chevalley generators) と呼ぶ．Π が $\mathfrak{h}^*$ の基底をなすので，$\{h_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ は Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の基底をなす．

以上より，集合

$$\{e_\alpha, f_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+\} \sqcup \{h_i \mid i = 1, \ldots, n\} \tag{6.6}$$

は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底をなす．

さて $C \coloneqq C(\Delta) = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ をルート系 Δ（と単純ルートの集合 Π）に付随する Cartan 行列とする．すなわち，各 $1 \le i, j \le n$ に対し，

$$c_{ij} \coloneqq \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad \in \mathbb{Z}$$

とする（Cartan 整数）．$i \neq j$ ならば $c_{ij} \le 0$ であることを思い出そう．

命題 6.1. n 個の元 $e_1, \ldots, e_n$ (resp. $f_1, \ldots, f_n$) は Lie 代数 $\mathfrak{n}^+$ (resp. $\mathfrak{n}^-$) を生成する．さらに，次の **Serre 関係式** (Serre relation) を満たす：任意の $1 \le i \neq j \le n$ に対し

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-c_{ij}}(e_j) = 0 \qquad (\text{resp. } (\operatorname{ad} f_i)^{1-c_{ij}}(f_j) = 0). \tag{6.7}$$

Proof. $\mathfrak{n}' \coloneqq \operatorname{Im}(\mathsf{ev}_{(e_1,\ldots,e_n)}\colon \mathfrak{f}(x_1, \ldots, x_n) \to \mathfrak{n}^+)$ を $e_1, \ldots, e_n$ を含む最小の $\mathfrak{n}^+$ の部分 Lie 代数とする．$\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}^+$ であることを示す．そのためには任意の正ルート $\alpha \in \Delta^+$ について，$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}'$ であることを示せば十分である．正ルート $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i$ の高さ (height) を，$\mathsf{ht}\,\alpha \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ と定義する．$\mathsf{ht}\,\alpha$ に関する帰納法で，$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}'$ を示そう．$\mathsf{ht}\,\alpha = 1$ のとき，α は単純ルートだからよい．$\mathsf{ht}\,\alpha > 1$ とする．$(\alpha, \alpha) > 0$ なので，ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $(\alpha, \alpha_i) > 0$ でなくてはならない．このとき系 4.2 より，$\alpha - \alpha_i \in \Delta$ であるが，$\mathsf{ht}\,\alpha > 1$ より $\alpha - \alpha_i \in \Delta^+$ となる．このとき帰納法の仮定より，$\mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_i} \subset \mathfrak{n}'$ である．よって，命題 3.41(3) より $\mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_i}] \subset \mathfrak{n}'$ を得る．$\mathfrak{n}^-$ が $f_1, \ldots, f_n$ で生成されることも全く同様に示される．以上により，前半の主張が証明された．

次に Serre 関係式 (6.7) が満たされることを示す．$1 \le i \ne j \le n$ に対し，命題 3.41(4) より，非負整数 $p, q \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が存在して

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid \alpha_j + k\alpha_i \in \Delta\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid -p \le k \le q\}, \qquad p - q = \alpha_j(h_i) = c_{ij}$$

となる．(S2) より，$\alpha_j - \alpha_i \notin \Delta$ ゆえ $p = 0$，したがって $q = -c_{ij}$ でなくてはならない．ゆえに $\alpha_j + (1 - c_{ij})\alpha_i \notin \Delta$ となり，これから

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-c_{ij}}(e_j) \in \mathfrak{g}_{\alpha_j + (1-c_{ij})\alpha_i} = \{0\}$$

となる．$(\operatorname{ad} f_i)^{1-c_{ij}}(f_j) = 0$ の証明も全く同様である． □

系 6.2. 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は $3n$ 個の Chevalley 生成元 (6.5) によって生成され，Serre 関係式 (6.7) に加えて，以下の関係式を満たす：任意の $1 \le i, j \le n$ について

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = c_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -c_{ij} f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i. \tag{6.8}$$

Proof. 三角分解 (6.2) および命題 6.1 による．関係式 (6.8) は構成からほぼ明らか． □

より強く，次の主張が成り立つ．詳細については [2, §18] などを参照．

定理 6.3 (Serre の定理)**.** 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は生成元 (6.5) と関係式 (6.7), (6.8) による表示を持つ．すなわち，Lie 代数として

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}(C) \coloneqq \mathfrak{f}(e_i, f_i, h_i \mid i = 1, \dots, n)/\langle R(C) \rangle_{\mathsf{Lie}}$$

となる．ただし，集合 $R(C) \subset \mathfrak{f}(e_i, f_i, h_i \mid i = 1, \dots, n)$ は Cartan 行列 C のみに依存して，次で与えられる：

$$\begin{aligned} R(C) \coloneqq \{&[h_i, h_j], [h_i, e_j] - c_{ij} e_j, [h_i, f_j] + c_{ij} f_j, [e_i, f_j] - \delta_{ij} h_i \mid 1 \le i, j \le j\} \\ &\cup \{(\operatorname{ad} e_i)^{1-c_{ij}}(e_j), (\operatorname{ad} f_i)^{1-c_{ij}}(f_j) \mid 1 \le i \ne j \le n\}. \end{aligned}$$

逆に，与えられた（抽象）ルート系 Δ に対し，その Cartan 行列 $C(\Delta)$ に付随して上のように定義される Lie 代数 $\mathfrak{g}(C(\Delta))$ は有限次元半単純 Lie 代数になる．さらに対応 $\Delta \mapsto \mathfrak{g}(C(\Delta))$ は写像

$$\{\text{ 半単純 Lie 代数の同型類 }\} \to \{\text{ ルート系の同型類 }\}; \qquad \mathfrak{g} \mapsto \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

の逆写像を与える．すなわち，半単純 Lie 代数（の同型類）はルート系（の同型類）によって分類される．

上の対応において，単純 Lie 代数は既約ルート系に対応する．ゆえに次を得る．

系 6.4. 複素有限次元単純 Lie 代数の同型類は，定理 4.34 で列挙した X_n 型 Dynkin 図形 ($X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$) によって分類される．

注意 6.5. X_n 型 Dynkin 図形に対応する単純 Lie 代数を，単に X_n 型単純 Lie 代数などと呼ぶことが多い．古典型単純 Lie 代数は適当な行列たちのなす Lie 代数として，より具体的に実現できる：

- A_n 型：特殊線型 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_{n+1}$,
- B_n 型：奇数次直交 Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2n+1}$,
- C_n 型：斜交 (symplectic) Lie 代数 $\mathfrak{sp}_{2n}$,
- D_n 型：偶数次直交 Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2n}$.

ここで斜交 Lie 代数 $\mathfrak{sp}_{2n}$ とは，$\mathbb{C}^{2n}$ の非退化交代双線型形式を不変にする元全体のなす $\mathfrak{gl}_{2n}$ の部分 Lie 代数のことである．また，例外型単純 Lie 代数（や対応する Lie 群）を具体的に実現するには，八元数（Cayley 代数）や例外型 Jordan 代数などを用いる．これについては [2, §19], [1, §22.4]，和書なら [10, 付録] や [11] などが参考文献である．

6.2 最高ウェイト表現

ここからは，$\mathfrak{sl}_2$ の場合の諸結果（§2 参照）をお手本に，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現論について論ずる．前節で見たように，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現と普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の（左）加群は自然に同一視できるので，以下両者を同義語のように扱う．

また $\mathfrak{g}$ の表現 V を，固定した Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ の表現と見なして，そのウェイトを考える（§3.4 参照）．すなわち，各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について

$$V_\lambda := \{v \in V \mid hv = \lambda(h)v,\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

とおき，$V_\lambda \neq \{0\}$ であるとき λ を V のウェイト，V_λ をそのウェイト空間，ベクトル $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ をそのウェイトベクトルという．また

$$\mathrm{Wt}(V) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid V_\lambda \neq \{0\}\}$$

を V のウェイトの集合とする．次は補題 2.26 の一般化である．

補題 6.6. V は $\mathfrak{g}$ の表現とする．任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ と $\alpha \in \Delta^+$ について，以下が成り立つ：

$$e_\alpha V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}, \qquad f_\alpha V_\lambda \subset V_{\lambda-\alpha}.$$

Proof. 任意の $v \in V_\lambda$ と $h \in \mathfrak{h}$ について

$$\begin{aligned} he_\alpha v &= (he_\alpha - e_\alpha h)v + e_\alpha(hv) \\ &= [h, e_\alpha]v + e_\alpha \lambda(h)v \\ &= \alpha(h)e_\alpha v + \lambda(h)e_\alpha v \\ &= (\lambda + \alpha)(h)e_\alpha v, \end{aligned}$$

ゆえに $e_\alpha v \in V_{\lambda+\alpha}$ が分かる．全く同様に $f_\alpha v \in V_{\lambda-\alpha}$ も示される． □

以下，$\mathfrak{g}$ の表現 V と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し

$$V^{\mathfrak{n}^+} := \{v \in V \mid ev = 0, \forall e \in \mathfrak{n}^+\}, \qquad V_\lambda^{\mathfrak{n}^+} := V_\lambda \cap V^{\mathfrak{n}^+}$$

とおく．

定義 6.7 (最高ウェイト表現)**.** $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする．半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V が，最高ウェイト λ の**最高ウェイト表現** (highest weight representation) であるとは， 非零ベクトル $v \in V_\lambda^{\mathfrak{n}^+} \setminus \{0\}$ が存在し，$V = U(\mathfrak{g})v$ を満たすときをいう．このとき，ベクトル v を V の**最高ウェイトベクトル** (highest weight vector) と呼ぶ.

注意 6.8. 定義より明らかに，最高ウェイト λ の最高ウェイト表現 V の零でない商表現 V/U は，また最高ウェイト λ の最高ウェイト表現である．

例 6.9 ($\mathfrak{sl}_2$ の場合)**.** $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$ なので，線型同型 $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}; \lambda \mapsto \lambda(h)$ によって $\mathfrak{h}^*$ と $\mathbb{C}$ を同一視する．このとき $n+1$ 次元既約表現 $V(n)$ は最高ウェイト n の最高ウェイト表現である．$v_0 \in V(n)$（もしくはその $\mathbb{C}^\times$ 倍）は最高ウェイトベクトルである．

ここで少し環論の用語を導入しておく．一般の $\mathbb{C}$ 代数 A について，A 自身を左からの掛け算作用によって左 A 加群と見做すことができる．これを左正則加群という．左正則加群の部分 A 加群を左イデアルという．すなわち A の左イデアルとは部分ベクトル空間 $I \subset A$ であって条件 $AI \subset I$ を満たすもののことである．左イデアル I による商 A/I は自然に左 A 加群となる．これを商加群と呼ぶ.

定義 6.10 (Verma 加群)**.** $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の左イデアル $I(\lambda)$ を

$$I(\lambda) := \sum_{i=1}^{n} U(\mathfrak{g})(h_i - \lambda(h_i)) + \sum_{\alpha \in \Delta^+} U(\mathfrak{g})e_\alpha$$

によって定義する．商加群

$$M(\lambda) := U(\mathfrak{g})/I(\lambda)$$

を最高ウェイト λ の **Verma 加群**と呼ぶ．単位元 $1 \in U(\mathfrak{g})$ の商写像 $U(\mathfrak{g}) \to M(\lambda)$ による像を v_λ と書く．

命題 6.11. 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，Verma 加群 $M(\lambda)$ は以下の性質を満たす：

(1) 任意の $U(\mathfrak{g})$ 加群 V に対し，次の自然な全単射がある：

$$\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M(\lambda), V) \xrightarrow{1:1} V_\lambda^{\mathfrak{n}^+}; \qquad \varphi \mapsto \varphi(v_\lambda).$$

(2) 正ルートの集合 Δ に全順序を入れて $\Delta^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$ と書く．このとき集合

$$\{f_{\beta_1}^{k_1} f_{\beta_2}^{k_2} \cdots f_{\beta_N}^{k_N} v_\lambda \mid k_1, k_2, \dots, k_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

は Verma 加群 $M(\lambda)$ の基底をなす．特に $M(\lambda)$ は $\mathbb{C}$ 上可算無限次元である．

(3) $M(\lambda)$ は最高ウェイト λ の最高ウェイト表現であり，v_λ はその最高ウェイトベクトルである．さらに，$\mathfrak{g}$ の表現 V が最高ウェイト λ の最高ウェイト表現であることと，V が $M(\lambda)$ の零でない商に同型であることは同値である．

Proof. (1): 定義より $v_\lambda \in M(\lambda)_\lambda^{\mathfrak{n}^+}$ であるから，任意の準同型 $\varphi\colon M(\lambda) \to V$ に対し，$\varphi(v_\lambda) \in V_\lambda^{\mathfrak{n}^+}$ となる（補題 3.25 参照）．よって題意の写像は well-defined である．各 $v \in V_\lambda^{\mathfrak{n}^+}$ に対し, 準同型 $\varphi_v\colon M(\lambda) \to V$ を $\varphi_v(x + I(\lambda)) := xv$ と定義する．$I(\lambda)v = \{0\}$ だからこれは well-defined である．この対応 $v \mapsto \varphi_v$ が逆写像を与える．

(2): 簡単のため $k = (k_1, \dots, k_N) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ に対し

$$f(k) := f_{\beta_1}^{k_1} \cdots f_{\beta_N}^{k_N}, \qquad e(k) := e_{\beta_1}^{k_1} \cdots e_{\beta_N}^{k_N}$$

とおく．集合 (6.6) は $\mathfrak{g}$ の基底なので，PBW 定理 5.27 より，集合

$$\{f(k) h_1^{m_1} \cdots h_n^{m_n} e(l) \mid k, l \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N,\ (m_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n\}$$

は普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の基底をなす．ゆえにそれを少し修正した集合

$$P(\lambda) := \{f(k)(h_1 - \lambda(h_1))^{m_1} \cdots (h_n - \lambda(h_n))^{m_n} e(l) \mid k, l \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N,\ (m_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n\}$$

も $U(\mathfrak{g})$ の基底である．このとき $I(\lambda)$ の定義より，

$$I(\lambda) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(P(\lambda) \setminus \{f(k) \mid k \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N\})$$

がわかるので，ベクトル空間として

$$U(\mathfrak{g}) = \left(\bigoplus_{k \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N} \mathbb{C} f(k) \right) \oplus I(\lambda)$$

となる．主張はこれから従う．

(3): (2) より特に $v_\lambda \neq 0$ なので，$M(\lambda)$ は最高ウェイト λ の最高ウェイト表現であって，v_λ はその最高ウェイトベクトルである．最高ウェイト表現の零でない商はまた最高ウェイト表現なので，特に $M(\lambda)$ の零でない商は最高ウェイト λ の最高ウェイト表現である．逆に，V が最高ウェイト λ の最高ウェイト表現であるとし，$v \in V_\lambda^{\mathfrak{n}^+} \setminus \{0\}$ をその最高ウェイトベクトルとすると，(1) より準同型 $\varphi_v \colon M(\lambda) \to V$ であって $\varphi_v(v_\lambda) = v$ なるものが存在する．$V = U(\mathfrak{g})v$ なので φ_v は全射，すなわち $\mathrm{Im}(\varphi_v) = V$ である．準同型定理より $V \cong M(\lambda)/\mathrm{Ker}(\varphi_v)$ となる． □

定義 6.12 (ルート格子/支配的順序)**.** $\mathfrak{h}^*$ の部分集合 Q および Q^+ を次で定義する：

$$Q \coloneqq \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\alpha = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i, \qquad Q^+ \coloneqq \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i.$$

定義より $\Delta^+ \subset Q^+ \subset Q \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ である．Q は加法に関して Abel 群をなし，群として $\mathbb{Z}^n$ に同型である．Q をルート系 Δ の**ルート格子** (root lattice) を呼ぶ．

集合 $\mathfrak{h}^*$ 上に二項関係 $\preceq$ を次で定める：$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し

$$\mu \preceq \lambda \qquad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \qquad \lambda - \mu \in Q^+.$$

$\preceq$ は $\mathfrak{h}^*$ の半順序を定める．これを**支配的順序** (dominance order) という．

レポート問題 29.

(1) ルート格子 Q が Weyl 群 $W(\Delta)$ の作用で保たれること，すなわち任意の $w \in W(\Delta)$ に対し $wQ \subset Q$ を示せ．

(2) 二項関係 $\preceq$ が $\mathfrak{h}^*$ の半順序を定めることを確かめよ．また，$\mu \preceq \lambda$ かつ $\mu' \preceq \lambda'$ ならば $\mu + \mu' \preceq \lambda + \lambda'$ であることを示せ．

系 6.13. 最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の最高ウェイト表現 V は，ウェイト表現である，すなわち $V = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Wt}(V)} V_\mu$ を満たす．さらに，$\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda = 1$ であり，任意のウェイト $\mu \in \mathrm{Wt}(V)$ に対して，$\dim_{\mathbb{C}} V_\mu < \infty$ かつ $\mu \preceq \lambda$ である．

Proof. $V = M(\lambda)$ のとき，補題 6.6 と命題 6.11(2) より主張は正しい．実際

$$\dim_{\mathbb{C}} M(\lambda)_\mu = \#\{(k_1, \ldots, k_N) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N \mid \textstyle\sum_{i=1}^N k_i\beta_i = \lambda - \mu\} < \infty$$

である．一般の最高ウェイト表現 V についての主張は，命題 6.11(3) より V は Verma 加群 $M(\lambda)$ の商だから，補題 3.28 を適用して示される． □

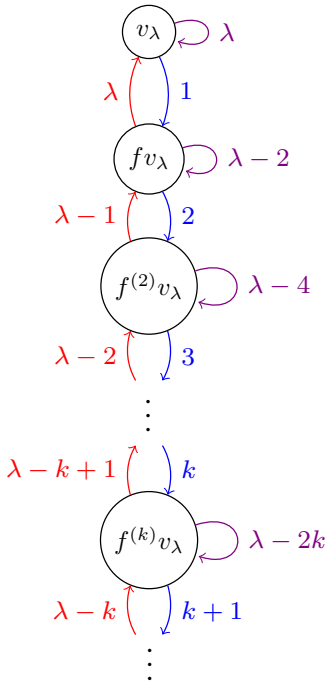
例 6.14 ($\mathfrak{sl}_2$ の場合)**.** 任意の $\lambda \in \mathbb{C} \cong \mathfrak{h}^*$ に対し，

$$M(\lambda) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C} f^{(k)} v_\lambda, \qquad \text{ただし } f^{(k)} := \frac{f^k}{k!}$$

である[*27]．$\mathfrak{sl}_2$ 作用は

$$\begin{aligned} f(f^{(k)} v_\lambda) &= (k+1) f^{(k+1)} v_\lambda, \\ h(f^{(k)} v_\lambda) &= (\lambda - 2k) f^{(k)} v_\lambda, \\ e(f^{(k)} v_\lambda) &= (\lambda - k + 1) f^{(k-1)} v_\lambda \end{aligned}$$

で与えられる（3 つ目の式については (2.11) を参照せよ）．したがって Verma 加群 $M(\lambda)$ の構造は以下のように図示できる．ここで，上向き矢印（赤），下向き矢印（青），ループ矢印（紫）がそれぞれ e, f, h の作用を表す．



命題 6.15. 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，最高ウェイト λ の既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ が同型を除いて一意的に存在する．$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ について，$\lambda \neq \mu$ ならば $V(\lambda) \not\cong V(\mu)$ である．

Proof. まず題意の既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ を，Verma 加群 $M(\lambda)$ の商として構成する．$U \subsetneq M(\lambda)$ を部分表現とする．系 6.13 および補題 3.28 より U はウェイト加群で

[*27] ここで f^k の代わりに $f^{(k)}$ を用いているのは，式 (2.5) と比べ易くするためである．

ある．このとき $U_\lambda = \{0\}$ である．実際，$U_\lambda \neq \{0\}$ と仮定すると，$M(\lambda)_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda$ より $v_\lambda \in U$ となるが，$U(\mathfrak{g})v_\lambda = M(\lambda)$ だからこれは $U \neq M(\lambda)$ に反する．したがって

$$N(\lambda) := \sum_{U \subsetneq M(\lambda)\text{: 部分表現}} U$$

とおけば，$N(\lambda)_\lambda = \{0\}$ であり，特に $N(\lambda) \subsetneq M(\lambda)$ である．すなわち，$N(\lambda)$ は $M(\lambda)$ と異なる $M(\lambda)$ 部分表現のうち包含関係に関して最大のものである．

このとき商表現

$$V(\lambda) := M(\lambda)/N(\lambda)$$

は既約最高ウェイト表現である．実際，$V(\lambda)$ の部分表現と，$M(\lambda)$ の部分表現であって $N(\lambda)$ を含むものが 1:1 に対応する．後者は $M(\lambda)$ か $N(\lambda)$ しかなく，それぞれ前者の $V(\lambda)$ と $\{0\}$ に対応する．よって $V(\lambda)$ の既約である．またこの構成より，$V(\lambda)$ が $M(\lambda)$ のただひとつの既約商加群であることも分かる．

命題 6.11(3) より，ウェイト λ の任意の最高ウェイト表現 V は $M(\lambda)$ の商と同型であるから，V が既約ならば $V(\lambda)$ と同型でなくてはならない．これから一意性が従う．

また $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ について $V(\mu) \cong V(\lambda)$ と仮定すると，特に $\mu \in \mathrm{Wt}(V(\lambda))$ かつ $\lambda \in \mathrm{Wt}(V(\mu))$ となる．系 6.13 より，これは $\mu \preceq \lambda$ かつ $\lambda \preceq \mu$，すなわち $\lambda = \mu$ を導く．ゆえに $\lambda \neq \mu$ ならば $V(\lambda) \not\cong V(\mu)$ である． □

例 6.16 ($\mathfrak{sl}_2$ の場合)**.** 例 6.14 より，各 $\lambda \in \mathbb{C} \cong \mathfrak{h}^*$ について，命題 6.15 の証明に出てきた最大真部分表現 $N(\lambda) \subsetneq M(\lambda)$ は次のようになることが分かる：

$$N(\lambda) = \begin{cases} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C} f^{\lambda+1+k} v_\lambda \cong M(-n-1) & \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ のとき}, \\ \{0\} & \lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ のとき}. \end{cases} \tag{6.9}$$

ゆえに，各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $V(n)$ は $n+1$ 次元既約表現（§2.2 で構成したものと同じ）であり，$\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき $V(\lambda) = M(\lambda)$ となる（既約 Verma 加群）．

レポート問題 30. 既約でない最高ウェイト表現は完全可約でないことを示せ．

補題 6.17. V は最高ウェイト λ の最高ウェイト表現，$v_\lambda \in V$ をその最高ウェイトベクトルとする．このとき：

$$V \cong V(\lambda) \qquad \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \qquad V^{\mathfrak{n}^+} = \mathbb{C}v_\lambda.$$

Proof. ($\Longrightarrow$ の証明): $V(\lambda)^{\mathfrak{n}^+} = \mathbb{C}v_\lambda$ を示す．$V(\lambda)$ はウェイト表現なので，補題 3.28 より

$$V(\lambda)^{\mathfrak{n}^+} = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V(\lambda)_\mu^{\mathfrak{n}^+}$$

と分解する．ここで $V(\lambda)_\mu^{\mathfrak{n}^+} \neq \{0\}$ と仮定すると，命題 6.11(1) より，零でない準同型 $\varphi\colon M(\mu) \to V(\lambda)$ が存在する．$V(\lambda)$ の既約性から φ は全射，ゆえに $V(\mu) \cong V(\lambda)$ となる．命題 6.15 より，このとき $\lambda = \mu$ である．よって $\mu \neq \lambda$ ならば $V(\lambda)_\mu^{\mathfrak{n}^+} = \{0\}$ が分かった．一方，$V(\lambda)_\lambda^{\mathfrak{n}^+} = \mathbb{C}v_\lambda$ である．

($\Longleftarrow$ の証明): $V^{\mathfrak{n}^+} = \mathbb{C}v_\lambda$ と仮定して，V が既約であることを示す．$U \subset V$ を零でない任意の部分表現とする．補題 3.28 より U はウェイト表現である．ウェイトの集合 $\mathrm{Wt}(U)$ は空ではなく，$\mathrm{Wt}(U) \subset \mathrm{Wt}(V) \subset \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \mu \preceq \lambda\}$ であるから，$\mathrm{Wt}(U)$ は支配的順序 $\preceq$ に関する極大元 μ を持つ．このとき $\{0\} \neq U_\mu \subset U^{\mathfrak{n}^+} \subset V^{\mathfrak{n}^+} = \mathbb{C}v_\lambda$ なので，結局 $\mu = \lambda$ であり，U は最高ウェイトベクトル v_λ を含む．よって $U \supset U(\mathfrak{g})v_\lambda = V$，すなわち $U = V$ である．これで V の既約性が示された． □

6.3 有限次元既約表現の分類

ここからは有限次元表現に着目する．

補題 6.18. 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の零でない任意の有限次元表現 V について，$V^{\mathfrak{n}^+} \neq \{0\}$ が成り立つ．また $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現は最高ウェイト表現である．

Proof. V が $\mathfrak{g}$ の零でない有限次元表現であるとする．このとき $h_1, \ldots, h_n$ の V 上の作用は互いに可換であるから，線形代数の一般論より，同時固有ベクトルが少なくともひとつ存在する．すなわち $\mathrm{Wt}(V)$ は空でない有限集合である．そこで支配的順序に関して極大な $\mathrm{Wt}(V)$ の元 λ がとれる．このとき補題 6.6 より $V_\lambda^{\mathfrak{n}^+} = V_\lambda \neq \{0\}$，ゆえに $V^{\mathfrak{n}^+} \neq \{0\}$ が従う．さらにこのとき，命題 6.11(1) より，零でない準同型 $\varphi\colon M(\lambda) \to V$ が存在する．ここでもし V が既約ならば，φ は全射であり，$V \cong V(\lambda)$ を得る． □

ゆえに，$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の分類は，有限次元最高ウェイト表現の分類に帰着する．

定義 6.19 (支配的整ウェイト)**.** $\mathfrak{h}^*$ の部分集合 P および P^+ を以下のように定義する：

$$P := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z},\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i,$$

$$P^+ := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i.$$

ここで $\{\varpi_1, \ldots, \varpi_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ は基底 $\{h_1, \ldots, h_n\} \subset \mathfrak{h}$ の双対基底である．P の元を**整ウェイト** (integral weight), P^+ の元を**支配的整ウェイト** (dominant integral weight) と呼ぶ．

また $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ を**基本ウェイト** (fundamental weight) と呼ぶ．もちろん $P^+ \subset P$ である．また，結晶条件 (R4) より $Q \subset P$ である[*28]．P は加法に関して Abel 群をなし，**ウェイト格子** (weight lattice) と呼ばれる．Q は P の部分 Abel 群である．

後で使うので以下の諸性質に注意しておく．

補題 6.20. $P \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ かつ $P = W(\Delta) \cdot P^+$ である．

Proof. 各 $1 \leq j \leq n$ について，

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j(h_i)\varpi_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\varpi_i$$

である．すなわち，$\mathfrak{h}^*$ の 2 つの基底 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ と $\{\varpi_1, \ldots, \varpi_n\}$ のあいだの変換行列は Cartan 行列 $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ によって与えられる．$C \in GL_n(\mathbb{Q})$ より，その逆行列 $C^{-1} = (c'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ もまた $GL_n(\mathbb{Q})$ に属する．よって各 $1 \leq j \leq n$ について $\varpi_j = \sum_{i=1}^{n} c'_{ij}\alpha_i$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に属する．これで包含 $P \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ が示された．

次に，$P = W(\Delta) \cdot P^+$ を示す．

$$\mathcal{C}(\Pi) \coloneqq \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid (\alpha_i, \lambda) > 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

を単純ルートの集合 Π に対応する Weyl の部屋，$\overline{\mathcal{C}(\Pi)}$ を Euclid 位相に関するその閉包とすれば，

$$P^+ = \{\lambda \in P \mid (\alpha_i, \lambda) \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} = P \cap \overline{\mathcal{C}(\Pi)}$$

と書ける．系 4.24 より $W(\Delta) \cdot \overline{\mathcal{C}(\Pi)} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ であるから，$P = W(\Delta) \cdot P^+$ が分かる． □

注意 6.21. Weyl ベクトル $\rho \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ を思い出そう（定義 4.22）．系 4.23 より，各 $1 \leq i \leq n$ について $\rho(h_i) = \frac{2(\alpha_i, \rho)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = 1$ であるから，

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \varpi_i \tag{6.10}$$

が成り立つ．特に $\rho \in P^+$ である．

補題 6.22. $\lambda, \mu \in P^+$ について，次が成り立つ：

$$\mu \prec \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad (\mu, \mu) \leq (\lambda, \lambda) \quad \text{かつ} \quad (\mu, \mu + 2\rho) < (\lambda, \lambda + 2\rho).$$

[*28] 一方で，一般に $Q^+ \not\subset P^+$ なので注意．

Proof. $\mu \prec \lambda$ ならば，定義より $\lambda - \mu \in Q^+ \setminus \{0\}$ である．$1 \leq i, j \leq n$ に対し $(\varpi_i, \alpha_j) = \delta_{ij} \frac{(\alpha_j, \alpha_j)}{2}$ であることと，(6.10) より，任意の $\xi \in P^+$ について

$$(\xi, \lambda - \mu) \geq 0, \qquad (\xi + 2\rho, \lambda - \mu) > 0$$

となる．ここで $\xi = \lambda + \mu$ とすれば，これらはそれぞれ題意の不等式を与える． □

定理 6.23 (有限次元既約表現の分類)**.** $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について，次が成り立つ：

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda) < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \in P^+. \tag{6.11}$$

ゆえに

$$\{\ \mathfrak{g} \text{ の有限次元既約表現の同型類 }\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} P^+; \qquad V(\lambda) \longleftrightarrow \lambda.$$

Proof. 後半の主張は補題 6.18 および命題 6.15 から従う．前半の主張 (6.11) を示す．

以下 v_λ を $V(\lambda)$ の最高ウェイトベクトルとする．また各 $1 \leq i \leq n$ について，

$$\mathfrak{sl}_{2,i} := \mathbb{C} f_i \oplus \mathbb{C} h_i \oplus \mathbb{C} e_i$$

とおく．これは $\mathfrak{sl}_2$ と同型な $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である．

($\Longrightarrow$ の証明): $\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda) < \infty$ と仮定する．各 $1 \leq i \leq n$ について，$V(\lambda)$ を $\mathfrak{sl}_{2,i}$ の有限次元表現と思って，補題 2.28 を適用すれば，$v_\lambda \in V(\lambda)^{e_i}_{\lambda(h_i)} \neq \{0\}$ だから，$\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を得る．したがって $\lambda \in P^+$ である．

($\Longleftarrow$ の証明): $\lambda \in P^+$ と仮定する．このとき $\mathrm{Wt}(V(\lambda)) \subset \lambda - Q^+ \subset P$ に注意する．ポイントは次の主張を示すことである．

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_\mu = \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_{w(\mu)} \qquad (\forall \mu \in P, \forall w \in W(\Delta)) \tag{6.12}$$

もし (6.28) が正しいとすると，特に $\mathrm{Wt}(V(\lambda)) \subset P$ は $W(\Delta)$ の作用で不変である．よって，補題 6.20 より

$$\mathrm{Wt}(V(\lambda)) = W(\Delta) \cdot (\mathrm{Wt}(V(\lambda)) \cap P^+)$$

となる．補題 6.22 より，集合 $\{\mu \in P^+ \mid \mu \preceq \lambda\}$ はコンパクト集合 $\{\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \mid (\mu, \mu) \leq (\lambda, \lambda)\}$ の離散部分集合，ゆえに有限集合である．よって，その部分集合である $\mathrm{Wt}(V(\lambda)) \cap P^+$ も有限集合である．また $W(\Delta)$ は有限群である．ゆえに $\mathrm{Wt}(V(\lambda))$ は有限集合である．系 6.13 より各ウェイト空間 $V(\lambda)_\mu$ は有限次元であるから $V(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Wt}(V(\lambda))} V(\lambda)_\mu$ は有限次元となる．

よって (6.28) を示せば良い．そのためには，Weyl 群 $W(\Delta)$ は単純鏡映 $s_1, \ldots, s_n$ で生成されるので，各 $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_\mu = \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_{s_i(\mu)} \qquad (\forall \mu \in P) \tag{6.13}$$

を示せば良い．以下これを $\mathfrak{sl}_{2,i}$ の表現論を使って示そう．

まず，

$$f_i^{\lambda(h_i)+1} v_\lambda = 0 \tag{6.14}$$

であることに注意する．実際，例 6.14 と同じ計算で $e_i f_i^{\lambda(h_i)+1} v_\lambda = 0$ となり，また $j \neq i$ については e_j と f_i が可換だから $e_j f_i^{\lambda(h_i)+1} v_\lambda = f_i^{\lambda(h_i)+1} e_j v_\lambda = 0$ である．これらと命題 6.1 を併せて，$f_i^{\lambda(h_i)+1} v_\lambda \in V(\lambda)^{\mathfrak{n}^+}$ となる．しかし，補題 6.17 より $V^{\mathfrak{n}^+} = \mathbb{C} v_\lambda$ である．よって (6.14) を得る．

次に部分ベクトル空間 $U \subset V(\lambda)$ を

$$U \coloneqq \{v \in V(\lambda) \mid \exists k > 0,\ \text{s.t.}\ f_i^k v = 0\}$$

と定義したとき，$U = V(\lambda)$ を示す．まず (6.14) より，$v_\lambda \in U$ である．よって，U が部分表現であることを示せば，$V = U(\mathfrak{g}) v_\lambda \subset U$ から $U = V(\lambda)$ を得る．そこで任意の $v \in U, x \in \mathfrak{g}$ に対し，$xv \in U$ を示す．U の定義より，ある $k > 0$ が存在して $f_i^k v = 0$ となる．また随伴作用 $\operatorname{ad} f_i$ は冪零であるから，ある $l > 0$ が存在して $(\operatorname{ad} f_i)^l x = 0$ となる．$f_i(xv) = (\operatorname{ad} f_i)(x) v + x f_i v$ であり，これを $(k+l)$ 回繰り返せば

$$f_i^{k+l}(xv) = \sum_{j=0}^{k+l} \binom{k+l}{j} (\operatorname{ad} f_i)^j(x) f_i^{k+l-j} v = 0$$

となるので，$xv \in U$ を得る．これで $U = V(\lambda)$ が示された．

さて，任意の $\mu \in P$ に対して，補題 6.6 より，

$$V(\lambda)_{\mu + \mathbb{Z}\alpha_i} \coloneqq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V(\lambda)_{\mu + k\alpha_i}$$

は部分 $\mathfrak{sl}_{2,i}$ 表現である．$\mathrm{Wt}(\lambda) \subset \lambda - Q^+$ だから，ある $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して，$k > m_i$ ならば $V(\lambda)_{\mu + k\alpha_i} = \{0\}$ となる．一方，任意の $k \in \mathbb{Z}$ とベクトル $v \in V(\lambda)_{\mu + k\alpha_i}$ 対し，PBW 定理と前段落で示したことより，$\mathfrak{sl}_{2,i}$ 部分表現

$$V' \coloneqq U(\mathfrak{sl}_{2,i}) v = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{f_i^p h_i^q e_i^r v \mid p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{f_i^p e_i^r v \mid p, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, r \leq m_i\}$$

は有限次元である．$\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現論より，$\mathfrak{sl}_{2,i}$ 表現としての V' の指標

$$\chi(V') = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\dim_{\mathbb{C}} V'_{\mu + l\alpha_i}) z^{\mu(h_i) + 2l}$$

は z と z^{-1} を入れ替えても不変である．特に $-(\mu(h_i)+2k)=\mu(h_i)-2(\mu(h_i)+k)$ であるから，$z^{\mu(h_i)+2k}$ の係数と $z^{\mu(h_i)-2(\mu(h_i)+k)}$ の係数は等しい．すなわち

$$\dim_{\mathbb{C}} V'_{\mu+k\alpha_i} = \dim_{\mathbb{C}} V'_{\mu-(\mu(h_i)+k)\alpha_i} \leq \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_{\mu-(\mu(h_i)+k)\alpha_i}$$

を得る．ここで $k < -m_i - \mu(h_i)$ ならば右辺は 0，ゆえに $V'_{\mu+k\alpha_i} = \{0\}$ で，特に $v=0$ となる．v は $V(\lambda)_{\mu+k\alpha_i}$ の任意の元だったので，結局 $k < -m_i - \mu(h_i)$ ならば $V(\lambda)_{\mu+k\alpha_i} = \{0\}$ が分かる．ゆえに

$$V(\lambda)_{\mu+\mathbb{Z}\alpha_i} = \bigoplus_{-m_i-\mu(h_i)\leq k\leq m_i} V(\lambda)_{\mu+k\alpha_i}$$

であり，各ウェイト空間 $V(\lambda)_{\mu+k\alpha_i}$ は有限次元であるから，$V(\lambda)_{\mu+\mathbb{Z}\alpha_i}$ は有限次元 $\mathfrak{sl}_{2,i}$ 表現である．よって上と同様に，指標 $\chi(V(\lambda)_{\mu+\mathbb{Z}\alpha_i})$ は z と z^{-1} の入れ替えに関して不変である．特に，その $z^{\mu(h_i)}$ の係数と $z^{-\mu(h_i)}(= z^{s_i(\mu)(h_i)})$ の係数が等しいことから，(6.13) を得る． □

レポート問題 31. §3.2 において，$\mathfrak{g}$ の表現 V に対し，その反傾表現 V^* を定義した．任意の支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ に対し，

$$V(\lambda)^* \cong V(-w_0\lambda)$$

を示せ．ただし w_0 は Weyl 群 $W(\Delta)$ の最長元（系 4.40 参照）である．

6.4 Casimir 元と完全可約性定理

次の目標は有限次元表現の完全可約性を証明することである．最初にそのための準備として Casimir 元を導入し，その基本性質を述べる．これは §2.4 に登場した $\mathfrak{sl}_2$ の表現の Casimir 作用素の一般化である．

定義 6.24 (Casimir 元)**.** $\{x_i\}_{1\leq i\leq d}$ を半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底とし，$\{x'_i\}_{1\leq i\leq d}$ を Killing 形式に関するその双対基底，すなわち

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x_i, x'_j) = \delta_{ij} \qquad (1 \leq i, j \leq d)$$

を満たす基底とする．このとき，普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の元 $C_{\mathfrak{g}}$ を

$$C_{\mathfrak{g}} := \sum_{i=1}^{d} x_i x'_i$$

によって定義し，**Casimir 元** (Casimir element) と呼ぶ．

補題 6.25. Casimir 元 $C_{\mathfrak{g}}$ は基底 $\{x_i\}_{1\le i\le d}$ の取り方に依らない.

Proof. $\mathfrak{g}$ の別の基底 $\{y_i\}_{1\le i\le d}$ を任意に選び，$\{y'_i\}_{1\le i\le d}$ を Killing 形式に関するその双対基底とする．各 $1\le i\le d$ について

$$x_i=\sum_{j=1}^{d}\kappa_{\mathfrak{g}}(x_i,y'_j)y_j,\qquad y'_i=\sum_{j=1}^{d}\kappa_{\mathfrak{g}}(x_j,y'_i)x'_j$$

であることに注意すれば,

$$\sum_{i=1}x_ix'_i=\sum_{i,j=1}^{d}\kappa_{\mathfrak{g}}(x_i,y'_j)y_jx'_i=\sum_{j=1}^{d}y_jy'_j$$

を得る. □

例 6.26. 例えば，基底 (6.6) の Killing 形式に関する双対基底 $\{e'_\alpha,f'_\alpha\mid\alpha\in\Delta^+\}\sqcup\{h'_i\mid 1\le i\le n\}$ は

$$e'_\alpha=\frac{(\alpha,\alpha)}{2}f_\alpha,\qquad f'_\alpha=\frac{(\alpha,\alpha)}{2}e_\alpha,\qquad h'_i=\nu^{-1}(\varpi_i)$$

で与えられるから,

$$\begin{aligned}C_{\mathfrak{g}}&=\sum_{\alpha\in\Delta^+}\frac{(\alpha,\alpha)}{2}(e_\alpha f_\alpha+f_\alpha e_\alpha)+\sum_{i=1}^{n}h_i\nu^{-1}(\varpi_i)\\&=\sum_{\alpha\in\Delta^+}(\alpha,\alpha)f_\alpha e_\alpha+2\nu^{-1}(\rho)+\sum_{i=1}^{n}h_i\nu^{-1}(\varpi_i).\end{aligned}\tag{6.15}$$

ただし，$\rho:=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ は Weyl ベクトルである．ここで 2 つ目の等号に $[e_\alpha,f_\alpha]=h_\alpha=\frac{2}{(\alpha,\alpha)}\nu^{-1}(\alpha)$ を用いた.

命題 6.27. 任意の $x\in U(\mathfrak{g})$ に対し，$xC_{\mathfrak{g}}=C_{\mathfrak{g}}x$ が成り立つ．つまり $C_{\mathfrak{g}}$ は $U(\mathfrak{g})$ の中心元である.

Proof. $x\in\mathfrak{g}$ のときに示せば十分である．$\mathfrak{g}$ の基底 $\{x_i\}_{1\le i\le d}$ を選んで $C_{\mathfrak{g}}=\sum_{i=1}^{d}x_ix'_i$ と表示する（ここで $\{x'_i\}_{1\le i\le d}$ は Killing 形式に関する $\{x_i\}_{1\le i\le d}$ 双対基底)．ここで

$$[x,x_i]=\sum_{j=1}^{d}a_{ij}x_j,\qquad [x,x'_i]=\sum_{j=1}^{d}a'_{ij}x'_j$$

によってスカラー $a_{ij}, a'_{ij} \in \mathbb{C}$ $(1 \leq i, j \leq d)$ を定める．このとき

$$xC_{\mathfrak{g}} - C_{\mathfrak{g}}x = \sum_{i=1}^{d}([x, x_i]x'_i + x_i[x, x'_i]) = \sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij} + a'_{ji})x_j x'_i$$

となる．一方，$\kappa_{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{g}$ 不変性より，各 $1 \leq i, j \leq d$ について

$$a_{ij} + a'_{ji} = \kappa_{\mathfrak{g}}([x, x_i], x'_j) + \kappa_{\mathfrak{g}}(x_i, [x, x'_j]) = 0$$

である．ゆえに $xC_{\mathfrak{g}} - C_{\mathfrak{g}}x = 0$ を得る． □

命題 6.28. V は $\mathfrak{g}$ の表現，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ とする．任意の $v \in V_\lambda^{\mathfrak{n}^+}$ に対し，

$$C_{\mathfrak{g}}v = \gamma_\lambda v, \qquad \text{ただし } \gamma_\lambda \coloneqq (\lambda, \lambda + 2\rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho),$$

が成り立つ．

Proof. 表示 (6.15) より

$$\begin{aligned} C_{\mathfrak{g}}v &= \left(2\nu^{-1}(\rho) + \sum_{i=1}^{n} h_i \nu^{-1}(\varpi_i)\right) v \\ &= \left(2(\lambda, \rho) + \sum_{i=1}^{n} \lambda(h_i)(\lambda, \varpi_i)\right) v \\ &= (\lambda, \lambda + 2\rho)v \end{aligned}$$

を得る．ここで最後の等号に $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda(h_i)\varpi_i$ を用いた． □

系 6.29. V を最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の最高ウェイト表現とする．このとき Casimir 元 $C_{\mathfrak{g}}$ は V 上スカラー作用素 $\gamma_\lambda \mathsf{id}_V$ として作用する．

Proof. v_λ を V の最高ウェイトベクトルとする．命題 6.28 より，$C_{\mathfrak{g}}v_\lambda = \gamma_\lambda v_\lambda$ が成り立つ．また $V = U(\mathfrak{g})v_\lambda$ より，任意のベクトル $v \in V$ に対し，ある $x \in U(\mathfrak{g})$ が存在して $v = xv_\lambda$ と書ける．このとき，命題 6.27 より

$$C_{\mathfrak{g}}v = C_{\mathfrak{g}}xv_\lambda = xC_{\mathfrak{g}}v_\lambda = \gamma_\lambda xv_\lambda = \gamma_\lambda v$$

となる．したがって $C_{\mathfrak{g}}$ の V への作用は $\gamma_\lambda \mathsf{id}_V$ に等しい． □

これで完全可約性定理を証明する準備が整った．証明の方針は $\mathfrak{sl}_2$ のときと同様である．

定理 6.30 (完全可約性定理)**.** 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現は完全可約である．

Proof. V を $\mathfrak{g}$ の零でない有限次元表現とする．各 $1 \leq i \leq n$ について，V は $\mathfrak{sl}_{2,i} = \mathbb{C}f_i \oplus \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}e_i$ の有限次元表現ともみなせるので，$\mathfrak{sl}_2$ の表現論から特に h_i の V への作用は対角化可能であり，その固有値は全て整数である．すなわち，V は $\mathfrak{h}$ のウェイト表現であり，そのウェイトは全て整ウェイト，つまり $\mathrm{Wt}(V) \subset P$ である．

また V を，Casimir 元 $C_{\mathfrak{g}}$ の作用について広義固有空間の直和に分解する：

$$V = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{C}} V[\gamma], \qquad V[\gamma] \coloneqq \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t. } (C_{\mathfrak{g}} - \gamma)^k v = 0\}.$$

このとき命題 6.27 より，各 $V[\gamma]$ は V の部分表現になる．したがって，ある $\gamma \in \mathbb{C}$ に対して $V = V[\gamma]$ となる場合を考察すれば十分である．以下そのように仮定する．

V を有限次元 $\mathfrak{sl}_{2,i}$ と見做して，補題 2.28 を適用することにより

$$\mathrm{Wt}(V^{\mathfrak{n}^+}) \subset P^+$$

が分かる．一方で，$\mathrm{Wt}(V)_{\max}$ を $\mathrm{Wt}(V)$ の支配的順序 $\preceq$ に関する極大元のなす部分集合とすると，明らかに

$$V^{\mathfrak{n}^+} \supset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Wt}(V)_{\max}} V_\lambda$$

である．ゆえに

$$\mathrm{Wt}(V)_{\max} \subset \mathrm{Wt}(V^{\mathfrak{n}^+}) \subset P^+$$

を得る．仮定 $V \neq \{0\}$ より $\mathrm{Wt}(V) \neq \varnothing$, ゆえに $\mathrm{Wt}(V)_{\max} \neq \varnothing$ であることに注意する．

各有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対し，

$$P^+[q] \coloneqq \{\mu \in P^+ \mid \gamma_\mu = q\}$$

とおく．任意の $\lambda \in \mathrm{Wt}(V^{\mathfrak{n}^+})$ とベクトル $v \in V_\lambda^{\mathfrak{n}^+} \setminus \{0\}$ に対し，命題 6.28 より $C_{\mathfrak{g}} v = \gamma_\lambda v$ である．$V = V[\gamma]$ と仮定していたので，このとき $\gamma = \gamma_\lambda$ でなくてはならない．ゆえに $\gamma \in \mathbb{Q}$ であり，$\mathrm{Wt}(V^{\mathfrak{n}^+}) \subset P^+[\gamma]$ である．一方，

$$q_0 \coloneqq \max\{q \in \mathbb{Q} \mid \mathrm{Wt}(V) \cap P^+[q] \neq \varnothing\}$$

とすれば，補題 6.22 より $\mathrm{Wt}(V) \cap P^+[q_0] \subset \mathrm{Wt}(V)_{\max}$ である．以上を併せると

$$\mathrm{Wt}(V) \cap P^+[q_0] \subset \mathrm{Wt}(V)_{\max} \subset \mathrm{Wt}(V^{\mathfrak{n}^+}) \subset \mathrm{Wt}(V) \cap P^+[\gamma]$$

となる．したがって $q_0 = \gamma$ かつ $\mathrm{Wt}(V^{\mathfrak{n}^+}) = \mathrm{Wt}(V) \cap P^+[\gamma]$ となるので，結局

$$V^{\mathfrak{n}^+} = \bigoplus_{\lambda \in P^+[\gamma]} V_\lambda \tag{6.16}$$

を得る．この (6.16) は $V = V[\gamma]$ なる任意の有限次元表現 V について正しい．

$V^{\mathfrak{n}^+}$ のウェイトベクトルからなる基底 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ を選び，各 $1 \leq i \leq m$ について $\lambda_i \in P^+[\gamma]$ を v_i のウェイト，すなわち $v_i \in V_{\lambda_i}$ とする．このとき v_i で生成される部分表現 $U_i \coloneqq U(\mathfrak{g})v_i$ は v_i を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイト λ_i の最高ウェイト表現である．補題 6.22 より $\mathrm{Wt}(U_i) \cap P^+[\gamma] = \{\lambda_i\}$ であるから，(6.16) を U_i に適用して，$U_i^{\mathfrak{n}^+} = (U_i)_{\lambda_i} = \mathbb{C}v_i$ を得る．よって補題 6.17 より，$U_i \cong V(\lambda_i)$ が分かる．

ここで既約部分表現 $U_1, \ldots, U_m$ の和が直和であること，すなわち

$$U \coloneqq \sum_{i=1}^m U_i = \bigoplus_{i=1}^m U_i$$

を示す．そのためには $U_{<i} \coloneqq \sum_{j=1}^{i-1} U_j$ とおいて，$U_{<i} + U_i = U_{<i} \oplus U_i$ を任意の i に関する帰納法で示せば良い．$i = 1$ のときは自明なので，$i > 1$ として $U_{<i} \cap U_i = \{0\}$ を示す．もし $U_{<i} \cap U_i \neq \{0\}$ とすると，U_i の既約性から $U_i \subset U_{<i}$ でなくてはならない．このとき $U_i^{\mathfrak{n}^+} \subset U_{<i}^{\mathfrak{n}^+}$，ゆえに $v_i \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ となる．しかしこれは $v_1, \ldots, v_i$ が一次独立であることに反する．これで $U = \bigoplus_{i=1}^m U_i$ であり，ゆえに U が完全可約であることが示された．

最後に $U = V$ を示す．(6.16) を商表現 V/U に適用して

$$(V/U)^{\mathfrak{n}^+} = \bigoplus_{\lambda \in P^+[\gamma]} (V/U)_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in P^+[\gamma]} V_\lambda / U_\lambda$$

となる．ここで最後の等号に補題 3.28 を用いた．しかし，構成から各 $\lambda \in P^+[\gamma]$ に対して $U_\lambda = V_\lambda$ であるから，結局 $(V/U)^{\mathfrak{n}^+} = \{0\}$ となる．補題 6.18 より，これは $V/U = \{0\}$，すなわち $V = U$ を導く． □

注意 6.31. レポート問題 30 と完全可約性定理 6.30 を併せれば，任意の有限次元最高ウェイト表現は既約であることが分かる．

系 6.32. 各支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ に対し，

$$V(\lambda) = M(\lambda) / \sum_{i=1}^n U(\mathfrak{g}) f_i^{\lambda(h_i)+1} v_\lambda$$

が成り立つ．

Proof. 右辺の商表現を $V'(\lambda)$ とおき，その最高ウェイトベクトル v_λ について，定義より (6.14) が成り立つ．ゆえに，定理 6.23 の ($\Longrightarrow$) の証明と全く同じ議論が $V'(\lambda)$ に対して適用できて，$\dim_{\mathbb{C}} V'(\lambda) < \infty$ を得る．このとき，注意 6.31 より $V'(\lambda)$ は既約であり，$M(\lambda)$ の既約商の一意性（命題 6.15）より $V'(\lambda) = V(\lambda)$ が従う． □

6.5 Weyl の指標公式

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V が，有限次元ウェイト空間の直和に分解するとき，すなわち

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda, \qquad \dim_{\mathbb{C}} V_\lambda < \infty \quad (\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{6.17}$$

であるとき，V の**指標** (character) を形式和

$$\chi(V) := \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} (\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda) e^\lambda \tag{6.18}$$

として定義する．これはベクトル空間

$$F := \prod_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathbb{C} e^\lambda$$

の元である．例えば V が有限次元のとき，あるいは V が最高ウェイト表現のとき，条件 (6.17) は常に満たされる．

補題 6.33. $\mathfrak{g}$ の表現 V が条件 (6.17) を満たすとし，$U \subset V$ は部分表現であるとする．このとき U および商表現 V/U も条件 (6.17) を満たし，次の等式が成り立つ：

$$\chi(V) = \chi(U) + \chi(V/U).$$

Proof. これは補題 3.28 から直ちに従う． □

V が有限次元の場合，ウェイトの集合 $\mathrm{Wt}(V)$ は P の有限部分集合であるから，その指標 $\chi(V)$ は

$$\mathbb{C}[P] := \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{C} e^\lambda \qquad \subset F$$

の元である．$\mathbb{C}[P]$ 上の積（双線形写像 $\mathbb{C}[P] \times \mathbb{C}[P] \to \mathbb{C}[P]$）を

$$e^\lambda e^\mu := e^{\lambda+\mu}$$

によって定義すれば，$\mathbb{C}[P]$ は可換 $\mathbb{C}$ 代数となる．その単位元は $1 := e^0$ である．ここで $z_i^{\pm 1} := e^{\pm \varpi_i}$ とおけば，$\mathbb{C}$ 代数として $\mathbb{C}[P]$ は n 変数 Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$

と同一である．特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき，$\mathbb{C}[P] = \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ であり，この同一視のもとで §2.4 で定義した表現の指標 $\chi(V)$ の定義とここでの定義は一致する．

注意 6.34. 一般に，形式和 $A = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} a_\lambda e^\lambda, B = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} b_\lambda e^\lambda \in F$ に対して，それらの積 AB を形式和

$$AB := \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \left(\sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} a_\mu b_{\lambda - \mu} \right) e^\lambda \tag{6.19}$$

として定義することを考える．一般に和 $\sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} a_\mu b_{\lambda-\mu}$ は無限和なので (6.19) の右辺が F の well-defined な元を定めるためには条件が必要である．例えば，各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，$\{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid a_\mu b_{\lambda-\mu} \neq 0\}$ が有限集合であればよい．以下ではこの条件が成り立つ場合にのみ積 AB を考える．

有限次元既約表現の分類定理 6.23 および完全可約性定理 6.30 により，$\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現 V に対し，支配的整ウェイト $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in P^+$ が順序の入れ替えを除いて一意的に存在し，

$$V \cong V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_d)$$

と既約分解する．このとき指標は

$$\chi(V) = \chi(V(\lambda_1)) + \cdots + \chi(V(\lambda_d))$$

となる．既約表現 $V(\lambda)$ の指標は

$$\chi(V(\lambda)) = e^\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} m_{\lambda,\mu} e^\mu \qquad (m_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{6.20}$$

という形をしているので，集合 $\{\chi(V(\lambda)) \mid \lambda \in P^+\}$ はベクトル空間 $\mathbb{C}[P]$ において一次独立である．よって，系 2.38 と同様に次が示される：

命題 6.35. $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 V, V' について

$$V \cong V' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \chi(V) = \chi(V').$$

本節の目的は既約表現の指標 $\chi(V(\lambda))$ に関する Weyl の公式（定理 6.36）を説明することである．そのために以下の記号を導入する．

- 非零元 $\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ に対し，

$$\frac{1}{1 - e^\lambda} := \sum_{k=0}^{\infty} e^{k\lambda}$$

とおく．実際 $(1-e^{\lambda})\cdot(\sum_{k=0}^{\infty}e^{k\lambda})=1$ が成り立つことに注意.

- $\mathfrak{g}$ の Weyl 群 $W(\Delta)$ を単に W と書く．Weyl 群の元 $w\in W$ に対し，$\mathrm{sgn}(w):=\det_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*}(w)$ と定義する．ここで $W\subset O(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)$ であり，任意の $g\in O(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)$ に対し $\det_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*}(g)\in\{\pm1\}$ であることに注意すれば，写像 $w\mapsto\mathrm{sgn}(w)$ は群準同型

$$\mathrm{sgn}\colon W\to\{\pm1\}$$

を定めることが分かる．さらに補題 4.1(2) より，任意の $\alpha\in\Delta$ に対し $\mathrm{sgn}(s_\alpha)=-1$ であるから，例えば，元 $w\in W$ が単純鏡映の積として $w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_l}$ と書けるとき，$\mathrm{sgn}(w)=(-1)^l$ である．特に，Weyl 群の元の長さ $\ell(w)$（§4.6 参照）を用いれば $\mathrm{sgn}(w)=(-1)^{\ell(w)}$ とも書ける．

定理 6.36 (Weyl の指標公式)**.** 任意の支配的整ウェイト $\lambda\in P^+$ に対し，

$$\chi(V(\lambda))=\frac{\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})}\tag{6.21}$$

が成り立つ.

定理を証明する前に，まずそこから得られる幾つかの帰結を見ておく.

系 6.37 (Weyl の分母公式)**.** 次の等式が成り立つ：

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})=\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{w\rho-\rho}.\tag{6.22}$$

Proof. Weyl の指標公式 (6.36) において $\lambda=0$ とすれば，$V(0)$ は 1 次元自明表現であるから, 左辺 $\chi(V(0))$ は 1 となる．よって題意の等式を得る． □

注意 6.38. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$（$A_{n-1}$ 型）の場合には，(6.22) は Vandermonde 行列式に関する有名な公式

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)=\det(x_i^{n-j})_{1\le i,j\le n}$$

と本質的に同じものである.

系 6.39 (Weyl の次元公式)**.** 任意の支配的整ウェイト $\lambda\in P^+$ に対し，

$$\dim_{\mathbb{C}}V(\lambda)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}\frac{(\alpha,\lambda+\rho)}{(\alpha,\rho)}=\prod_{\alpha\in\Delta^+}\frac{(\lambda+\rho)(h_\alpha)}{\rho(h_\alpha)}\tag{6.23}$$

が成り立つ.

Proof. 各元 e^μ $(\mu \in P)$ を 1 に送ることによって得られる $\mathbb{C}$ 代数準同型 $\mathsf{ev}_1 \colon \mathbb{C}[P] \to \mathbb{C}$ を考えれば，指標の定義より $\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda) = \mathsf{ev}_1 \chi(V(\lambda))$ である．そこで ev_1 を Weyl 指標公式 (6.21) の右辺に適用することによって $\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)$ を計算したいのだが，分母が零になってしまうのでそのままでは適用することができない．この問題を回避するために少し工夫する必要がある．

$\mathscr{C}^\omega(\mathbb{R})$ を実数直線 $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{C}$ 値解析的関数のなす $\mathbb{C}$ 代数とし，t を $\mathbb{R}$ の標準座標とする．任意の元 $\xi \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ に対し，$\mathbb{C}$ 代数準同型 $\phi_\xi \colon \mathbb{C}[P] \to \mathscr{C}^\omega(\mathbb{R})$ を

$$\phi_\xi(e^\mu) := e^{t(\mu,\xi)} \qquad (\mu \in P)$$

によって定義する．ここで右辺は $\mathbb{R}$ 上の通常の指数関数である．このとき $A \in \mathbb{C}[P]$ に対して $\mathsf{ev}_1 A = \lim_{t=0} \phi_\xi(A)$ となることを利用する．

指標公式 (6.21) から分母を払って得られる（$\mathbb{C}[P]$ における）等式

$$\chi(V(\lambda)) \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha}) = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho}$$

の両辺に ϕ_ρ を適用すれば，

$$\phi_\rho \chi(V(\lambda)) \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-t(\alpha,\rho)}) = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{t(w(\lambda+\rho)-\rho,\rho)} \tag{6.24}$$

となる．一方で Weyl 分母公式 (6.22) の両辺に $\phi_{\lambda+\rho}$ を適用すれば

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-t(\alpha,\lambda+\rho)}) = \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) e^{t(w\rho-\rho,\lambda+\rho)} \tag{6.25}$$

となる．ここで $(w\rho - \rho, \lambda + \rho) = (w^{-1}(\lambda+\rho) - \rho, \rho) - (\lambda, \rho)$ なので，式 (6.24) の右辺の $e^{-t(\lambda,\rho)}$ 倍と式 (6.25) の右辺は等しい．よって

$$\phi_\rho \chi(V(\lambda)) = e^{-t(\lambda,\rho)} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - e^{-t(\alpha,\lambda+\rho)}}{1 - e^{-t(\alpha,\rho)}}$$

を得る．これと L'Hôpital の定理を用いて $\dim V(\lambda) = \lim_{t \to 0} \phi_\rho \chi(V(\lambda))$ を計算すれば求める等式 (6.23) を得る． □

以下，定理 6.36 の証明を述べよう．幾つか準備を行う．まず次の事実に着目する．

命題 6.40. 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，Verma 加群 $M(\lambda)$ の指標は次のようになる：

$$\chi(M(\lambda)) = \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Delta^+}(1 - e^{-\alpha})}.$$

Proof. 正ルートの集合に任意に全順序を入れて $\Delta^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$ と書く．このとき

$$\begin{aligned}\frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})} &= e^\lambda \prod_{\alpha\in\Delta^+}(1+e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}+e^{-3\alpha}+\cdots) \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} e^{\lambda-(k_1\beta_1+\cdots+k_N\beta_N)}\end{aligned}$$

となる．命題 6.11(2) からこれは $\chi(M(\lambda))$ に一致する．（系 6.13 の証明も参照.） □

任意の有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対し，

$$P[q] \coloneqq \{\mu \in P \mid \gamma_\mu = q\}$$

とおく．ここで $\gamma_\mu = (\mu+\rho, \mu+\rho) - (\rho, \rho)$ と定義していたので，

$$P[q] = P \cap \{\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \mid (\mu+\rho, \mu+\rho) = q + (\rho, \rho)\}$$

と書ける．特に $P[q]$ はコンパクト離散集合，ゆえに有限集合である．

次の補題は命題 6.28 および系 6.29 から容易に従う（定理 6.30 の証明を参照）．

補題 6.41. 最高ウェイト $\lambda \in P$ の最高ウェイト表現 V に対し，

$$\mathrm{Wt}(V^{\mathfrak{n}^+}) \subset P[\gamma_\lambda]$$

が成り立つ．

命題 6.42. V が最高ウェイト $\lambda \in P$ の最高ウェイト表現であるとき，等式

$$\chi(V) = \chi(V(\lambda)) + \sum_{\mu\in P[\gamma_\lambda], \mu\prec\lambda} a_\mu \chi(V(\mu)) \tag{6.26}$$

を満たす非負整数の組 $(a_\mu)_{\mu\in P[\gamma_\lambda],\mu\prec\lambda}$ がただひとつ存在する．

Proof. 一意性は $\{\chi(V(\mu)) \mid \mu \in P[\gamma_\lambda]\}$ の一次独立性より従う．

存在を $d \coloneqq \sum_{\mu\in P[\gamma_\lambda]} \dim V_\mu$ に関する帰納法で示す．上で見たように $P[\gamma_\lambda]$ は有限集合なので，$d < \infty$ であることに注意せよ．

$d = 1$ のとき，特に $\dim V^{\mathfrak{n}^+} = \dim V_\lambda = 1$ である．よって補題 6.17 より $V \cong V(\lambda)$ だから良い．

$d > 1$ とする．V が既約ならば $V \cong V(\lambda)$ だから良い．V が可約であるとすると，補題 6.17 および補題 6.41 より，あるウェイト $\lambda' \in P[\gamma_\lambda], \lambda' \prec \lambda$ について $V^{\mathfrak{n}^+}_{\lambda'} \neq \{0\}$ となる．そこで非零ベクトル $v \in V^{\mathfrak{n}^+}_{\lambda'}$ をとって $V' \coloneqq U(\mathfrak{g})v'$ とおけば，V' は最高ウェイ

ト λ' の最高ウェイト表現である．また商 V/V' は最高ウェイト λ の最高ウェイト表現である．このとき補題 6.33 より $\chi(V) = \chi(V') + \chi(V/V')$ である．V' および V/V' に対しては帰納法の仮定を適用できるので，結論を得る． □

注意 6.43. 命題 6.42 の $a_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は表現 V における既約表現 $V(\mu)$ の組成重複度（V の組成列に $V(\mu)$ が組成因子として現れる回数）に他ならない．

定理 6.36 の証明. 支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ を固定する．各 $\lambda' \in P[\gamma_\lambda]$ に対し，命題 6.42 を $V = M(\lambda')$ に対して適用して

$$\chi(M(\lambda')) = \sum_{\mu \in P[\gamma_\lambda]} a(\lambda', \mu)\chi(V(\mu'))$$

を満たすように非負整数の組 $(a(\lambda', \mu))_{\mu \in P[\gamma_\lambda]} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が定まる．これらは条件

$$a(\lambda', \mu) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad a(\lambda', \lambda') = 1, \qquad \mu \not\preceq \lambda' \Longrightarrow a(\lambda', \mu) = 0$$

を満たすので，行列 $(a(\lambda', \mu))_{\lambda', \mu \in P[\gamma_\lambda]}$ は支配的順序に関して三角行列であり，その対角成分は全て 1 である．よってその逆行列 $(b(\lambda', \mu))_{\lambda', \mu \in P[\gamma_\lambda]}$ が存在し，条件

$$b(\lambda', \mu) \in \mathbb{Z}, \qquad b(\lambda', \lambda') = 1, \qquad \mu \not\preceq \lambda' \Longrightarrow b(\lambda', \mu) = 0$$

を満たす．このとき任意の $\lambda' \in P[\gamma_\lambda]$ に対して

$$\chi(V(\lambda')) = \sum_{\mu \in P[\gamma_\lambda]} b(\lambda', \mu)\chi(M(\mu))$$

を得る．ここで $\lambda' = \lambda$ とし，命題 6.40 と併せれば

$$\chi(V(\lambda)) = \sum_{\mu \in P[\gamma_\lambda]} b(\lambda, \mu) \frac{e^\mu}{\prod_{\alpha \in \Delta^+}(1 - e^{-\alpha})} \tag{6.27}$$

となる．ゆえに，定理 6.36 の証明は次の命題に帰着する． □

命題 6.44. 任意の $\lambda \in P^+$ と $\mu \in P[\gamma_\lambda]$ に対し，次が成り立つ：

$$b(\lambda, \mu) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(w) & \text{ある } w \in W \text{ が存在して } \mu = w(\lambda + \rho) - \rho \text{ となるとき,} \\ 0 & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

Proof. 証明の要点は $\chi(V(\lambda))$ の Weyl 群不変性，すなわち定理 6.23 の証明中に示した式 (6.13) に着目することにある．まずこれを指標の言葉で言い換えよう．Weyl 群 W のウェイト格子 P への作用は，自然に $\mathbb{C}[P]$ への作用を誘導する．すなわち，

$$w \cdot e^\mu \coloneqq e^{w\mu} \qquad (w \in W, \mu \in P)$$

によって $\mathbb{C}[P]$ は Weyl 群 W の表現となる．この作用は $\mathbb{C}[P]$ における積と整合的，すなわち $f, g \in \mathbb{C}[P]$ と $w \in W$ に対し，$w \cdot (fg) = (w \cdot f)(w \cdot g)$ である．式 (6.13) は

$$w \cdot \chi(V(\lambda)) = \chi(V(\lambda)) \qquad (\forall w \in W) \tag{6.28}$$

と同値である．

一方で

$$D := e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{\alpha})$$

とおくと，D は Weyl 群の作用に関して交代的である．すなわち任意の $w \in W$ に対し

$$w \cdot D = \mathrm{sgn}(w) D \tag{6.29}$$

を満たす．これは実際，各 $1 \leq i \leq n$ に対し，補題 4.21 およびその系 4.23 より

$$s_i D = e^{\rho - \alpha_i}(1 - e^{\alpha_i}) \prod_{\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}} (1 - e^{-\alpha}) = -D$$

となることから分かる．

さて，式 (6.27) の両辺に D を掛けて分母を払うことで，$\mathbb{C}[P]$ における等式

$$\chi(V(\lambda)) D = \sum_{\mu \in P[\gamma_\lambda]} b(\lambda, \mu) e^{\mu + \rho} \tag{6.30}$$

を得る．この両辺に任意の元 $w \in W$ を作用させると，(6.28) と (6.29) より

$$\mathrm{sgn}(w) \chi(V(\lambda)) D = \sum_{\mu \in P[\gamma_\lambda]} b(\lambda, \mu) e^{w(\mu + \rho)} \tag{6.31}$$

を得る．(6.30) と (6.31) を比較して

$$b(\lambda, w(\mu + \rho) - \rho) = \mathrm{sgn}(w) b(\lambda, \mu) \qquad (w \in W, \mu \in P[\gamma_\lambda]) \tag{6.32}$$

となる．特に $\mu = \lambda$ とすれば，条件 $b(\lambda, \lambda) = 1$ より

$$b(\lambda, w(\lambda + \rho) - \rho) = \mathrm{sgn}(w) \qquad (w \in W)$$

となる．

いま，$\mu \in P[\gamma_\lambda]$ について $b(\lambda, \mu) \neq 0$ と仮定する．適当に $w' \in W$ を選んで $\mu' := w'(\mu + \rho) \in P^+$ となるようにできる．このとき (6.32) より $b(\lambda, \mu' - \rho) = \mathrm{sgn}(w') b(\lambda, \mu) \neq 0$ であるから，特に $\mu' - \rho \preceq \lambda$，すなわち $\lambda - \mu' + \rho \in Q^+$ である．また $\lambda + \mu' \in P^+$ であるから，補題 6.22 の証明と同様に

$$(\lambda + \mu' + \rho, \lambda - \mu' + \rho) \geq 0$$

であって，等号成立は $\lambda - \mu' + \rho = 0$ のときに限る．一方，仮定 $\mu \in P[\gamma_\lambda]$ より

$$(\lambda + \mu' + \rho, \lambda - \mu' + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\mu', \mu') = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\mu + \rho, \mu + \rho) = 0$$

である．よって $\mu' = \lambda + \rho$ でなくてはならない．以上より，任意の $\mu \notin W(\lambda + \rho) - \rho$ に対して，$b(\lambda, \mu) = 0$ となることがわかる．これで命題 6.44 は示された． □

■余談　Weyl の指標公式（定理 6.36）によって有限次元既約表現の指標が分かったので，次のステップとして，支配的整ウェイトではない $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対応する無限次元既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ の指標 $\chi(V(\lambda))$ を求めよ，というのは自然な問題である．この場合，Weyl の指標公式のような閉じた公式 (closed formula) は知られていないが，指標 $\chi(V(\lambda))$ を統一的に計算するある種の帰納的アルゴリズムは確立されている．これは「Kazhdan–Lusztig 予想」（1979 年に提唱，Beilinson–Bernstein, Brylinski–柏原によって 1981 年に解決）として知られている有名な事実である．ここで特に興味深いのは，Kazhdan–Lusztig 予想の解決に旗多様体上の D 加群や交差コホモロジーといった幾何学的手法を要した点である．これは現在「幾何学的表現論」(geometric representation theory) と呼ばれる分野の嚆矢となった．もしこのあたりの詳細に興味があれば [8, 第 II 部] や [3, Chapter 8] などを眺めてみることをお勧めします．

参考文献

[1] William Fulton and Joe Harris, *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer-Verlag, New York, 1991. （和訳：フルトン-ハリス 表現論入門 上・下，木本一史訳，丸善出版，2024.）

[2] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics 9, Springer-Verlag, New York, 1972.

[3] James E. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Mathematics 94, American Mathematical Society, 2008.

[4] Anthony W. Knapp, *Lie groups, Lie algebras and Cohomology*, Mathematical Notes 34, Princeton University Press, Princeton, 1988.

[5] Tom Leinster, *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 143, Cambridge University Press, Cambridge, 2014. （和訳：ベーシック圏論，土岡俊介訳，丸善出版，2017.）

[6] Jean-Pierre Serre, *Lie Algebras and Lie Groups: 1964 lectures given at Harvard University*, 2nd edition, Lecture Notes in Mathematics 1500, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1992.

[7] 平井武，具体例からの表現論入門：表現論入門セミナー [新装版] 第 I 巻，日本評論社，2022.

[8] 堀田良之・谷崎俊之，D 加群と代数群 [復刊]，丸善出版，2020.

[9] 小林俊行・大島利雄，リー群と表現論，岩波書店，2005.

[10] 佐武一郎，リー環の話 [新版]，日評数学選書，日本評論社，2002.

[11] 横田一郎，例外型単純リー群，現代数学社，2002. （英語版：“Exceptional Lie Groups”, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2025.）